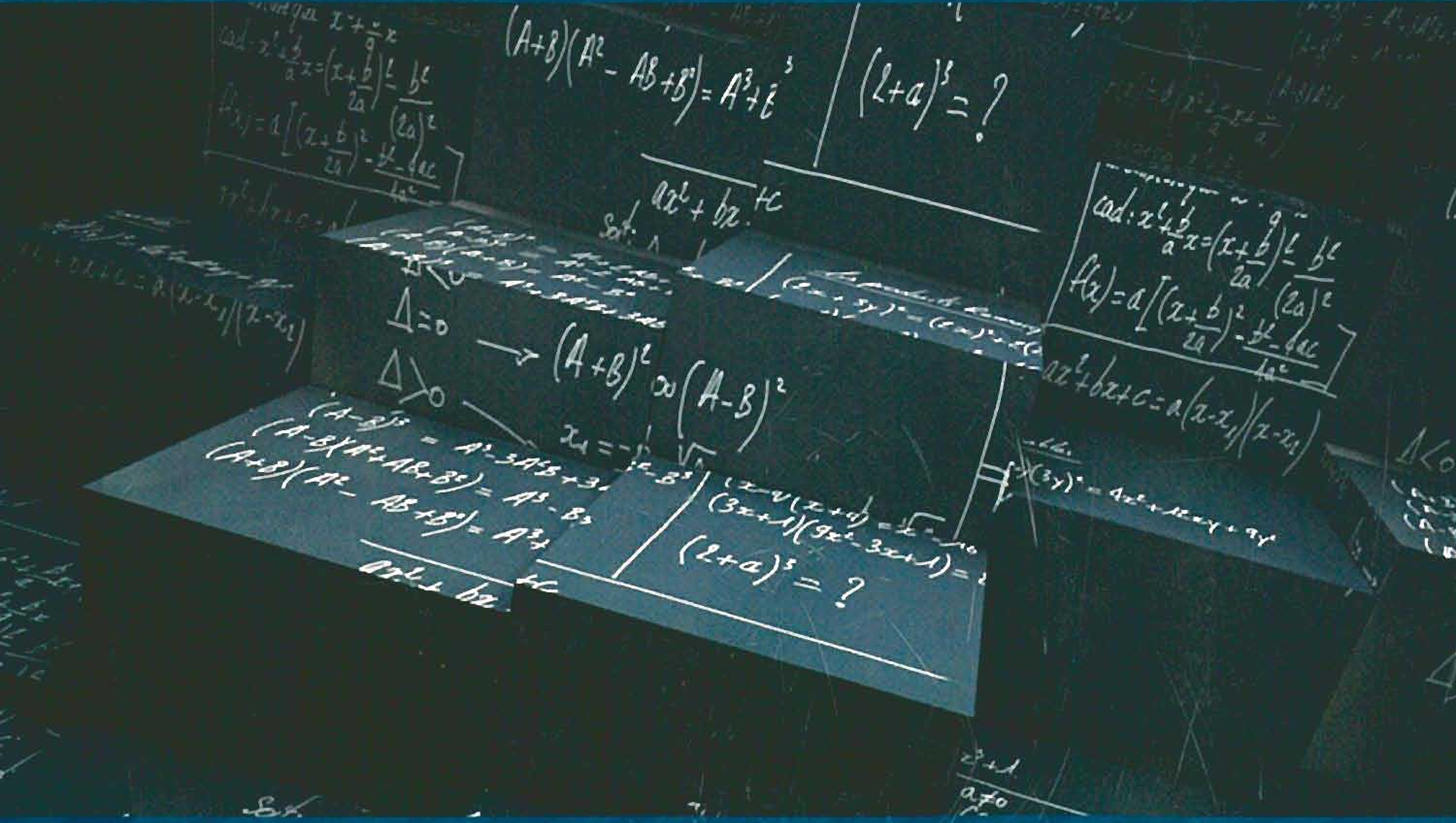
М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

Институт математики, экономики и информатики

М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В четырех частях
Часть 1

Учебное пособие

Рекомендовано Иркутским региональным отделением научно-методического совета по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информационная безопасность»

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.16
Ф19

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ

Издание выходит в рамках Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012–2016 гг., проект Р121-02-001

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор *Н. А. Сидоров*, д-р физ.-мат. наук, зав. отделением нелинейных динамических систем и дифференциальных уравнений ИДСТУ СО РАН *А. А. Щеглова*

Ф19 **Фалалеев М. В.**
Математический анализ. В 4 ч. Ч. 1 : учеб. пособие / М. В. Фалалеев. – Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2013. – 177 с.
ISBN 978-5-9624-0823-1 (ч. 1)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Первая часть курса включает элементы теории множеств и вещественного числа, теорию пределов числовых последовательностей и функций, теорию непрерывности функции, дифференциального исчисления функций одной переменной, теорию интеграла Римана.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информационная безопасность».

Библиогр. 38 назв.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9624-0823-1 (ч. 2)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Оглавление

1. Введение

1.1. Аксиоматика множества действительных чисел

Множество всех действительных (вещественных) чисел будет для нас некоторое время основным. Его принято обозначать R. Приведем здесь его основные свойства.

На множестве R по определенным правилам заданы операции *сложения* и *умножения*. Операции сложения и умножения обладают свойствами:

1) $a+b=b+a$ при любых a и b (коммутативность сложения);

   $(a+b)+c=a+(b+c)$ при любых a, b и c (ассоциативность сложения);

   существует единственное число 0 (называемое нулем) такое, что $a+0=a$ при любом a;

   для любого числа a существует единственное число, обозначаемое $(-a)$, такое, что $a+(-a)=0$

   (говорят, что R наделено структурой *абелевой группы по сложению*);

2) $a\cdot b=b\cdot a$ при любых a и b (коммутативность умножения);

   $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ при любых a, b и c (ассоциативность умножения);

   существует единственное число 1 (называемое единицей) такое, что $a\cdot 1=a$ при любом a;

   для любого числа $a\neq 0$ существует единственное число, обозначаемое $\dfrac{1}{a}$, такое, что $a\cdot\dfrac{1}{a}=1$

   (говорят, что на R задана структура *абелевой группы по умножению*);

3) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (закон дистрибутивности).

Наличие этих трех групп свойств означает, что множество R наделено структурой *поля.*

На множестве R задано *отношение порядка,* т.е. для любых двух чисел a и b имеет место одно из трех соотношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$. Эти отношения обладают *свойством транзитивности,* т.е. из $a \leq b$ и $b \leq c$ следует $a \leq c$.

Отношение порядка и операции сложения и умножения связаны между собой следующими свойствами:

а) из $a < b$ следует $a + c < b + c$ при любых a, b и c;

б) из $a < b$ и $c > 0$ следует $ac < bc$.

Последними отметим такие два свойства:

Аксиома Архимеда. $\forall a \in R \quad \exists n \in N$ такое, что $a \leq n$.

Аксиома отделимости. $\forall X \neq \emptyset$ и $\forall Y \neq \emptyset$ таких, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ справедливо неравенство $x \leq y$, найдется число c такое, что $x \leq c \leq y \quad \forall x \in X$ и $\forall y \in Y$.

Здесь использованы кванторы $\forall$ всеобщности и $\exists$ существования.

1.2. Множества и операции над ними

Обозначим через $\mathcal{M}$ некоторое исходное (универсальное) множество, а через A, B, $C \dots$ — произвольные множества, состоящие из элементов $\mathcal{M}$. Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B, то A называется *подмножеством* B, обозначается $A \subset B$. Если $A \neq \emptyset$ и $A \neq B$, то A называется *собственным* подмножеством, иначе *несобственным.* Множества A и B называются *равными,* если они состоят из одних и тех же элементов, обозначается $A = B$. Отметим, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. *Суммой* или *объединением* двух множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Аналогично определяется сумма любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Умножением или *пересечением* двух множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих обоим множествам. Аналогично определяется понятие пересечения любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Операции пересечения и объединения множеств коммутативны и ассоциативны:

$$A \cap B = B \cap A, \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \cup B = B \cup A, \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

а также взаимно дистрибутивны:

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C), \quad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Разностью множеств A и B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не входят в B. *Симметрической разностью* двух множеств A и B называется множество

$$C = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Разность $\mathcal{M} \setminus A$ называется *дополнением* множества A, обозначается $CA \equiv \mathcal{M} \setminus A$. Очевидно, $A \cap CA = \emptyset$. Для операции дополнения справедливы следующие два *принципа двойственности* (*законы де Моргана*):

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \qquad C(A \cap B) = CA \cup CB.$$

В справедливости всех выписанных тождеств можно убедиться, например, при помощи *диаграмм Эйлера – Венна*.

В дальнейшем будут регулярно использоваться следующие числовые множества:

$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ — множество натуральных чисел,

$Z = N \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}$ — множество целых чисел,

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in Z,\ n \in N,\ \frac{m}{n} = \frac{km}{kn}\ \ \forall k \in N \right\}$ — множество рациональных чисел,

$R \backslash Q$ — множество иррациональных чисел, для которых справедливы включения $N \subset Z \subset Q \subset R$.

1.3. Принцип минимального элемента. Принцип математической индукции

Определение. Число a называется *минимумом* множества $A \subset R$, если: а) $a \in A$; б) $a \le x\ \ \forall x \in A$, и обозначается $a = \min A$.

Аналогично определяется понятие $\max A$ максимума множества.

Лемма 1 (о единственности минимального элемента). *Если существует $a = \min A$, то a единственно.*

Доказательство (от противного). Пусть существует два числа $a = \min A$ и $b = \min A$ и $a \ne b$, тогда по определению $\min A$ $a \le b$ и $b \le a$, а это означает, что $a = b$, т. е. $\min A$ единственнен. **Лемма доказана.**

Справедлива также следующая очевидная

Лемма 2 (принцип минимального элемента). *Любое непустое подмножество множества натуральных чисел N имеет минимальный элемент.*

Докажем теперь теорему, имеющую многочисленные применения в математике.

Теорема (принцип математической индукции). *Если $A \subset N$, и A обладает свойствами:* а) $1 \in A$; б) *если $n \in A$, то $(n+1) \in A$, тогда $A \equiv N$.*

Доказательство (от противного). Пусть существует множество $A \in N$, которое обладает свойствами а) и б), но $A \ne N$, тогда дополнение $CA \equiv N \setminus A \ne \emptyset$ не пусто, а значит по принципу минимального элемента существует

$n_0 = \min(CA) \in CA$. В силу условий теоремы $1 \in A$, и поэтому $1 \notin CA$, тогда $n_0 > 1$. Следовательно, натуральное число $(n_0 - 1) \in A$ и в силу условия б) теоремы $n_0 \in A$, но $n_0 \in CA$. Полученное противоречие доказывает равенство множеств $A \equiv N$. **Теорема доказана.**

Таким образом, чтобы доказать некоторое утверждение для любого $n \in N$, достаточно показать, во-первых, справедливость этого утверждения при $n = 1$ и, во-вторых, предполагая истинным утверждение для номера n, показать его справедливость для следующего номера $(n+1)$.

Применим метод математической индукции для доказательства неравенства Бернулли и формулы бинома Ньютона.

Теорема (неравенство Бернулли). *Для любых* $x \geq -1$ *и* $n \in N$ *справедливо неравенство* $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Доказательство. При $n = 1$ неравенство $(1+x)^1 \geq$ $\geq 1 + 1 \cdot x$ справедливо.

Пусть неравенство Бернулли справедливо для номера n, т. е. $(1+x)^n \geq 1 + nx$ при $x \geq -1$, тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

так как $nx^2 \geq 0$. В силу принципа математической индукции неравенство Бернулли доказано. **Теорема доказана.**

Определение. $n! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! \overset{\text{def}}{=} 1$, $1! \overset{\text{def}}{=} 1$. Целые числа

$$C_n^k \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in N, \quad 0 \leq k \leq n$$

называются *биномиальными коэффициентами* или *числом сочетаний из* n *по* k.

Биномиальные коэффициенты обладают свойствами

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \;\; C_n^0 = C_n^n = 1, \;\; C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \;\; 1 \leq k \leq n,$$

справедливость которых следует непосредственно из определения биномиальных коэффициентов.

Теорема (бином Ньютона). *Для любых двух вещественных чисел a и b и $\forall n \in N$ справедливо равенство*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1} +$$

$$+ C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Доказательство. При $n = 1$ $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1$ — формула справедлива.

Пусть формула справедлива при значении показателя степени n, тогда

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + a^n b \left[C_n^1 + C_n^0\right] + a^{n-1} b^2 \left[C_n^2 + C_n^1\right] + \ldots +$$

$$+ a^{n+1-k} b^k \left[C_n^k + C_n^{k-1}\right] + \ldots + a b^n \left[C_n^n + C_n^{n-1}\right] + b^{n+1} C_n^n =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + \ldots +$$

$$+ C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

Теорема доказана.

Пример. Доказать, что $\forall n \geq 2$ выполняется неравенство

$$2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

или в эквивалентной форме

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

При $n = 2$ неравенство справедливо, поскольку

$$2+\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}+\left(2-2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}-4+1}{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\sqrt{2}-\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}.$$

Далее в силу предположения индукции $\forall n > 2$ получаем

$$2+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= 2\sqrt{n+1}+\left(2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{n+1}+\frac{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}-(2n+1)}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= 2\sqrt{n+1}-\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Неравенство доказано.

1.4. Модуль вещественного числа. Целая и дробная части числа. Плотность Q в R

Определение. *Модулем* вещественного числа a называется неотрицательное вещественное число, обозначаемое символом $|a|$, определяемое по следующему правилу:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

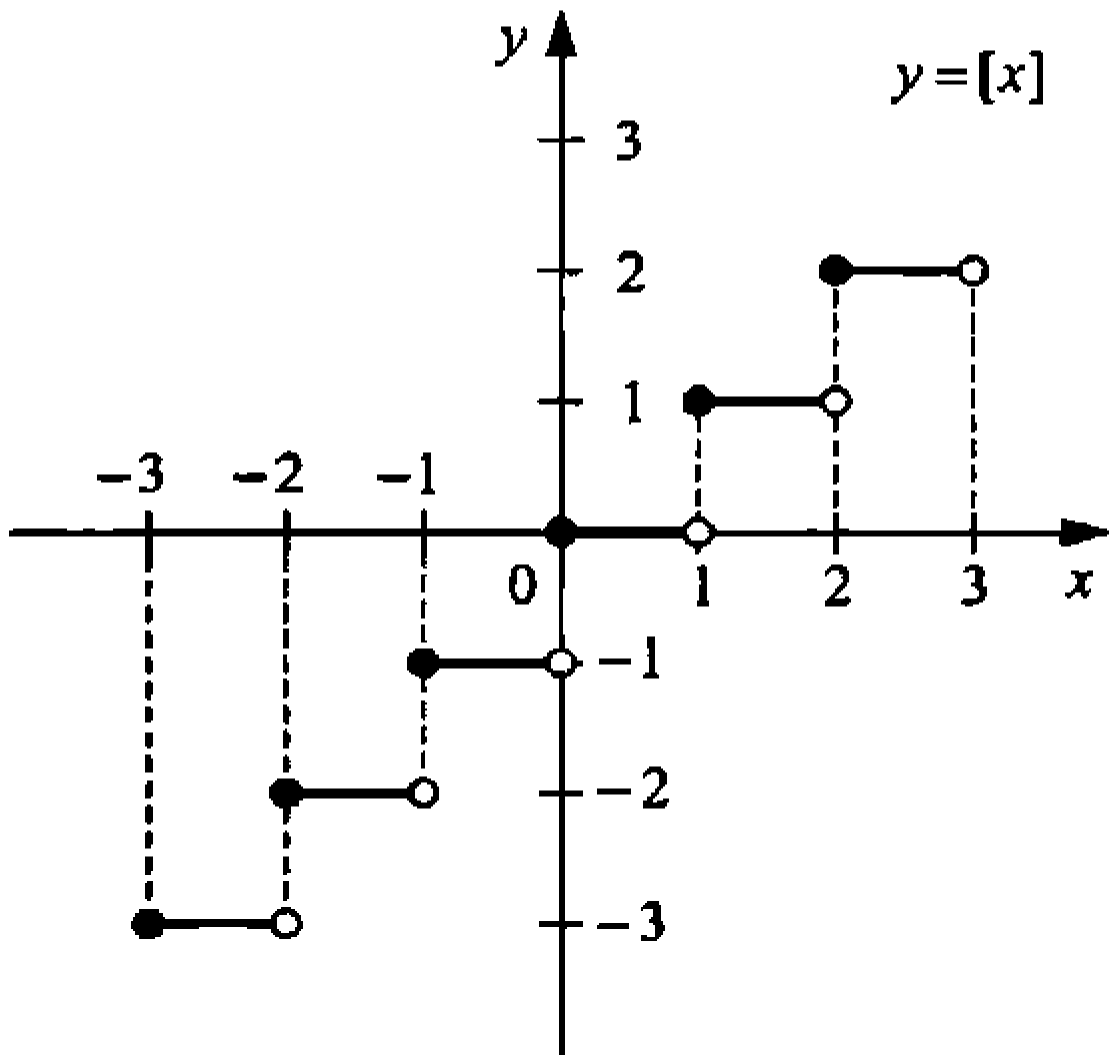
Для любых двух вещественных чисел a и b справедливы соотношения:

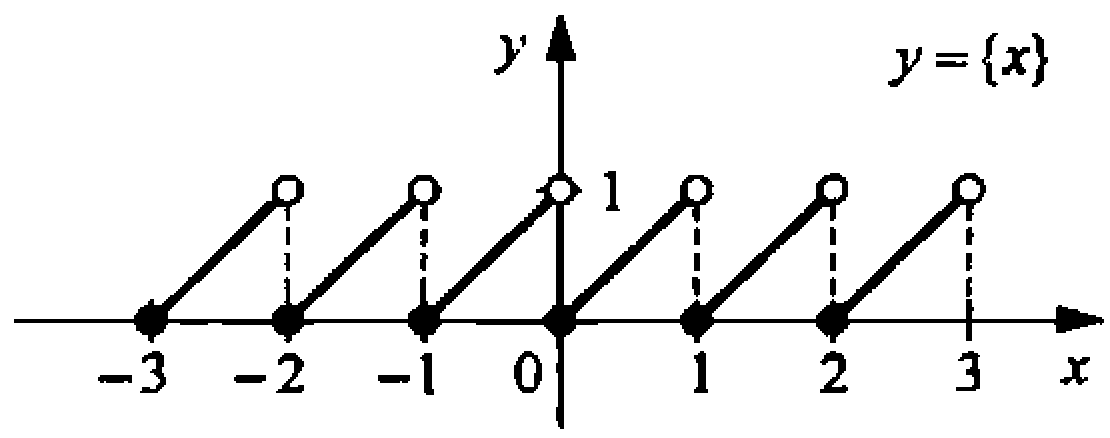
$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \qquad |a+b| \leq |a|+|b|,$$

$$|a|^{2n} = a^{2n}, \qquad |a|-|b| \leq ||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

Численно величина $|a-b|$ *равна расстоянию* между числами a и b на числовой оси. В этом и состоит *геометрический смысл модуля.*

Определение. *Целой частью* вещественного числа x называется максимальное целое число, обозначаемое $[x]$, не превосходящее x. *Дробной частью* вещественного числа x называется число, обозначаемое $\{x\}$, определяемое равенством $\{x\} = x - [x]$.





Отметим, что $\forall x \in R$ справедливы неравенства

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Теорема (о плотности Q в R). *Любой интервал* $(a; b)$ *содержит число* $q \in Q$.

Доказательство. Пусть $(a; b)$ — заданный интервал, т. е. $a < b$, тогда $\dfrac{1}{b-a} > 0$. По аксиоме Архимеда существует натуральное число $n \in N$ такое, что $\dfrac{1}{b-a} < n$. Отсюда $b - a > \dfrac{1}{n} \;\Rightarrow\; b > a + \dfrac{1}{n}$.

Введем число $p = [na]$. Очевидно $p \in Z$ и $p \leq na < p+1$,

$$\frac{p}{n} \leq a < \frac{p+1}{n} = \frac{p}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b,$$

т. е. $a < \dfrac{p+1}{n} < b$, но $q = \dfrac{p+1}{n} \in Q$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Любое вещественное число $r \in R$ можно приблизить числом из Q с любой степенью точности.*

1.5. Верхние и нижние грани числовых множеств. Принцип вложенных отрезков

Определение. Числовое множество A называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует вещественное число M (число m) такое, что $\forall x \in A \quad x \le M \quad (m \le x)$. При этом число M (число m) называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) множества A.

Теорема (о верхних гранях). *Множество верхних граней ограниченного сверху непустого числового множества имеет минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть $A \neq \emptyset$ — ограниченное сверху непустое множество, рассмотрим множество его верхних граней

$$B = \{b \in R \mid a \le b \;\; \forall a \in A\} \neq \emptyset.$$

Множества A и B удовлетворяют аксиоме отделимости, т. е. $\exists c \in R$ такое, что $a \le c \le b \;\; \forall a \in A, \forall b \in B$. Из неравенства $a \le c \;\; \forall a \in A$ следует включение $c \in B$, но так как $c \le b \;\; \forall b \in B$, то $c = \min B$. **Теорема доказана.**

В силу леммы о единственности минимального элемента (см. § 3) число $c = \min B$ единственно и его называют *точной верхней гранью* множества A и обозначают

$$\sup A = \min\{b \in R \mid a \le b \;\; \forall a \in A\}.$$

Определение $\sup A$ означает, с одной стороны, что $a \le \sup A \;\; \forall a \in A$, с другой стороны, что всякое число, меньшее чем $\sup A$, уже не является верхней гранью, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a_\varepsilon \in A$ такое, что $\sup A - \varepsilon < a_\varepsilon \le \sup A$. Таким образом, верхнюю грань числового множества можно определить так:

Определение. Число $\sup A$ называется *точной верхней гранью* числового множества A, если: а) $a \le \sup A$ $\forall a \in A$; б) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_\varepsilon \in A$, что $\sup A - \varepsilon < a_\varepsilon \le \sup A$.

Аналогично определяется *точная нижняя грань* множества A

$$\inf A = \max\{b \in R \mid b \le a \ \ \forall a \in A\}$$

или так:

Определение. Число $\inf A$ называется *точной нижней гранью* числового множества A, если: а) $a \ge \inf A$ $\forall a \in A$; б) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_\varepsilon \in A$, что $\inf A \le a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$.

Пример. У множества $(a; b]$ $\sup((a;b]) = \max((a;b]) = b$, $\inf((a;b]) = a$, $\min((a;b])$ не существует. Если $X = \left\{\frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1}, \ \ t > 0\right\}$, то, записав представление для элементов множества X в виде

$$\frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t^2+t}{t^2+t+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\frac{1}{4}}{(t+\frac{1}{2})^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{(2t+1)^2}},$$

находим $\sup X = \frac{1}{2}$, $\inf X = 0$, $\max X$ и $\min X$ не существуют.

Теорема (принцип вложенных отрезков). *Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, принадлежащее всем отрезкам системы.*

Доказательство. Пусть $\{[a_n; b_n]\}$ — система вложенных отрезков, т.е. $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$. Рассмотрим множества $A \equiv \{a_n\}$ и $B \equiv \{b_n\}$, A и B удовлетворяют аксиоме отделимости, поэтому существует число $c \in R$ такое, что $a_n \le c \le b_n$ $\forall n \in N$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Если дополнительно потребовать от системы вложенных отрезков стремление к нулю их длин, т. е.* $b_n - a_n \to 0$, *то точка* c *будет единственной.*

Доказательство (от противного). Пусть существуют два числа $c_1 \neq c_2$, $c_1, c_2 \in [a_n; b_n]$, $n \in N$, $c_2 > c_1$, но $c_2 - c_1 > 0$, что противоречит условию $b_n - a_n \to 0$. **Следствие доказано.**

1.6. Отображение, образ, прообраз, биекция

Пусть X и Y — некоторые множества из R. Если каждому $x \in X$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное $y \in Y$, то говорят, что на X задано *отображение* (*функция*), при этом X называется *областью определения* отображения (функции), а Y — *областью значений.*

Пусть $x \in X$, тогда отвечающий ему элемент $y = f(x) \in \in Y$ называется *образом элемента* x при отображении f. Соответственно, если $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, тогда множество

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, \quad f(x) = y\}$$

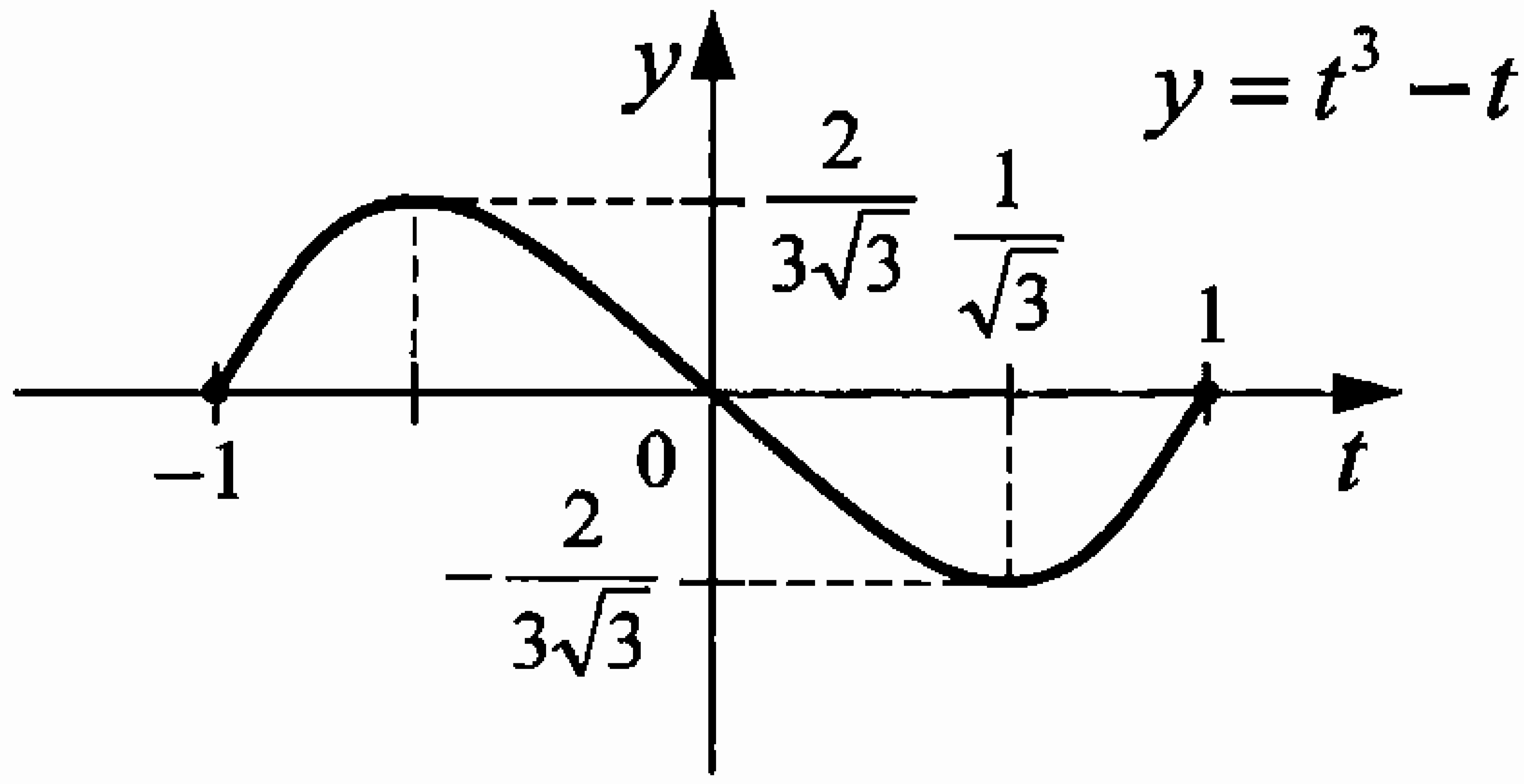
называется *образом множества* A при отображении f, т. е. $f(A)$ состоит из всех элементов вида $y = f(x)$, $x \in A$.

Пусть $y \in Y$, тогда совокупность всех элементов $x \in X$, образом которых является этот элемент y, называется *полным прообразом элемента* y и обозначается $f^{-1}(y)$. Соответственно, если $D \subset Y$, $D \neq \emptyset$, то множество

$$f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$$

называется *прообразом множества* D, т. е. $f^{-1}(D)$ состоит из тех элементов $x \in X$, образы которых принадлежат D.

Пример 1. Для отображения $f : R \to R$, действующего по правилу $f(t) = t^3 - t$, имеем $f([-1; 1]) \equiv \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$,



$$f\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right]\right)\equiv f([-1;0])\equiv\left[0;\frac{2}{3\sqrt{3}}\right],\ f^{-1}(0)\equiv\{-1;\ 0;\ 1\},$$

$$f^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad f^{-1}\left(\left[0;\frac{2}{3\sqrt{3}}\right]\right)\equiv[-1;0]\cup\{1\}.$$

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *биекцией* (*взаимнооднозначным соответствием*), если прообраз любого элемента $y \in Y$ состоит только из одного элемента.

Для всякой биекции всегда существует обратное отображение $g : Y \to X$, обозначаемое $g = f^{-1}$, причем $(f^{-1})^{-1} = f$ и $(g^{-1})^{-1} = g$.

Пример 2. Отображение $y : R \to [0;+\infty)$, действующее по правилу $y(x) = x^2$, не является биекцией, но действующее по тому же правилу отображение $g : [0;+\infty) \to \to [0;+\infty)$ является биекцией. Отображение из предыдущего примера 1 $f : R \to R$, действующее по правилу $f(t) = t^3 - t$, также не является биекцией.

Если отображение $g : X \to Y$, а отображение $f : Y \to Z$, то отображение $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) : X \to Z$ называется *композицией* отображений f и g.

Теорема. *Композиция двух биекций является биекцией.*

1.7. Мощность множества. Счетные множества. Несчетность R. Плотность $(R \setminus Q)$ и R

Определение. Два множества X и Y называют *равномощными* (*эквивалентными, имеющими одинаковую мощность*), если между ними можно установить биекцию (взаимнооднозначное соответствие), т. е.:

а) любому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$;

б) любому элементу $y \in Y$ соответствует некоторый элемент $x \in X$;

в) разным элементам множества X соответствуют разные элементы Y.

Обозначают $X \sim Y$ или $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

Определение. Множество X, эквивалентное множеству натуральных чисел N, называется *счетным.*

Если обозначить через x_n элемент счетного множества X, соответствующий числу $n \in N$, то образуется последовательность, поэтому говорят, что элементы счетного множества можно занумеровать числами натурального ряда. Приведем несколько теорем о счетных множествах.

Теорема 1. *Множество целых чисел счетно.*

Доказательство. Зададим биекцию $f : N \to Z$ по правилу $f(1) = 0$, $f(2n) = n$, $f(2n+1) = -n$. **Теорема 1 доказана.**

Теорема 2. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство проведем в два этапа. Вначале докажем, что любое бесконечное подмножества множества натуральных чисел счетно. Пусть $\mathcal{N} \subset N$ — бесконечное подмножество в N. По принципу минимального элемента существует $n_1 = \min \mathcal{N}$. Рассмотрим множество $\mathcal{N} \setminus \{n_1\}$, в нем существует $n_2 = \min(\mathcal{N} \setminus \{n_1\})$, причем $n_1 < n_2$ и т.д. В результате множество $\mathcal{N}$ можно записать так: $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \ldots\}$, где $n_i < n_k$, если $i < k$ (т.е. упорядочить множество $\mathcal{N}$ по возрастанию), и после этого задать биекцию $f : N \to \mathcal{N}$ по правилу $f(i) = n_i$.

Пусть A — любое счетное множество (или $\operatorname{card} A = \operatorname{card} N$) и $B \subset A$ — некоторое его бесконечное подмножество, тогда в силу счетности A существует биекция $f : N \to A$, т.е. $f(n) = a_n$ и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$. Множество B состоит из элементов a_{n_k}, здесь n_k — индексы его элементов. Индексы n_k образуют бесконечное подмножество $\mathcal{N} = \{n_k\} \subset N$ множества натуральных чисел, поэтому в силу уже доказанного выше существует биекция $g : N \to \mathcal{N}$, действующая по правилу $g(k) = n_k$. Отсюда следует, что композиция $h = f \circ g : N \to A$, действующая по правилу $h(k) = f(g(k)) = a_{n_k}$, является биекцией как композиция биекций. **Теорема 2 доказана.**

Теорема 3. *Объединение конечного (или счетного) числа счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть множества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ счетные, представим их объединение в виде матрицы

$$A_1 \equiv \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\},$$
$$A_2 \equiv \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\},$$
$$A_3 \equiv \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\},$$

и будем проводить нумерацию членов такого объединения по диагоналям этой матрицы, а именно, $1 \to a_{11}$, $2 \to a_{21}$, $3 \to a_{12}$, $4 \to a_{31}$, $5 \to a_{22}$, $6 \to a_{13}, \ldots$, что и означает счетность объединения. **Теорема 3 доказана.**

Теорема 4 (первая теорема Кантора). *Множество Q счетно.*

Доказательство. Множество Q можно представить как объединение счетного числа множеств $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_1 \equiv Z$, $A_2 \equiv \left\{\frac{p}{2} \,\middle|\, p \in Z\right\}, \ldots, A_n \equiv \left\{\frac{p}{n} \,\middle|\, p \in Z\right\}$, так как $\operatorname{card} A_n = \operatorname{card} Z = \operatorname{card} N$ при любом $n \in N$, то по предыдущей теореме 3 множество Q счетно. **Теорема 4 доказана.**

Теорема 5 (вторая теорема Кантора). *Множество R несчетно.*

Доказательство (от противного). Пусть множество R счетно, т. е. $R \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок $\Delta_1 = [x_1 + 1; x_1 + 2]$, очевидно $x_1 \notin \Delta_1$. Построим отрезок $\Delta_2 \subset \Delta_1$ такой, чтобы $\{x_1, x_2\} \notin \Delta_2$. Построим отрезок $\Delta_3 \subset \Delta_2$ такой, чтобы $\{x_1, x_2, x_3\} \notin \Delta_3$, и т. д. В результате получаем систему вложенных отрезков $\{\Delta_i\}$, причем $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \notin \Delta_i$. По принципу вложенных отрезков существует $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ и $x \neq x_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. $x \notin R$. Полученное противоречие означает несчетность R. **Теорема 5 доказана.**

Следствие. *Множество иррациональных чисел $R \setminus Q$ несчетно.*

Доказательство (от противного). Пусть $R \setminus Q$ счетно, тогда $R = (R \setminus Q) \cup Q$ счетно, но это противоречит теореме 5 о несчетности R. **Следствие доказано.**

Теорема 6. *Множество R и любой интервал $(a; b)$ равномощны, т. е. интервал $(a; b)$ — несчетное множество.*

Доказательство. Интервалы $(a; b)$ и $(-1; 1)$ равномощны, и соответствующее биективное отображение может быть, например, линейным

$$x = \frac{2t - a - b}{b - a} : (a; b) \to (-1; 1).$$

Отображение

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|} : (-1; 1) \to R$$

биективно отображает интервал $(-1; 1)$ на R, далее по теореме о композиции биекций получаем требуемое утверждение. **Теорема 6 доказана.**

Следствие (плотность $R \setminus Q$ в R). *Любой интервал* $(a; b)$ *содержит иррациональные числа.*

Доказательство (от противного). Пусть некоторый интервал $(a; b)$ содержит только рациональные числа, т. е. $(a; b) \subset Q$, тогда по теореме 2 и первой теореме Кантора множество $(a; b)$ счетно, но это противоречит теореме 6 о несчетности $(a; b)$. **Следствие доказано.**

2. Предел числовой последовательности

2.1. Понятие предела последовательности. Единственность предела. Линейные свойства предела последовательности

Определение. Функция, определенная на множестве натуральных чисел N и принимающая числовые значения, называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*, т. е. $a_n = f(n)$, $f : N \to R$.

Определение (*по Коши*). Число a называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in N$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Записывается это так: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Последовательность a_n, у которой существует конечный предел a, называется *сходящейся*, иначе *расходящейся*.

Очевидно, постоянная последовательность $a_n = a$ имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Пример 1. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, если $|q| < 1$.

Так как $|q| < 1$, то существует $k > 1$ такое, что $|q| = \dfrac{1}{k}$, тогда с помощью формулы бинома Ньютона получаем

$$k^n = ((k-1)+1)^n \geq C_n^2(k-1)^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{C_n^2(k-1)^2}.$$

Отсюда следует

$$|a_n - a| = n|q|^n = \frac{n}{k^n} = \frac{n}{((k-1)+1)^n} \leq \frac{n}{C_n^2(k-1)^2} =$$

$$= \frac{2}{(n-1)(k-1)^2} < \varepsilon$$

при любом $n > N_\varepsilon = \left[\dfrac{2}{\varepsilon(k-1)^2} + 1\right] + 1$, что в соответствии с определением предела последовательности и означает доказываемое равенство.

Пример 2. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{n}{2^n} \overset{n>4}{<} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} < \varepsilon$$

при любом $n > N_\varepsilon = \left[2\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Пример 3. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{2^n}{n!} \overset{n>2}{<} \frac{2^n}{2\cdot 3^{n-2}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} < \varepsilon$$

при любом $n > N_\varepsilon = \left[2 + \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{\varepsilon}{2}\right] + 1$.

Пример 4. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0, \ a > 1$.

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{a_1^n}\right)^k, \quad \text{где} \quad a_1 = a^{\frac{1}{k}} > 1,$$

$$a_1^n = ((a_1 - 1) + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (a_1 - 1)^i \geq C_n^2 (a_1 - 1)^2 =$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}(a_1 - 1)^2,$$

тогда

$$|a_n - a| \leq \left(\frac{2n}{n(n-1)(a_1-1)^2}\right)^k = \left(\frac{2}{(n-1)(a_1-1)^2}\right)^k < \varepsilon$$

при любом $n > N_\varepsilon = \left[\dfrac{2}{(a^{\frac{1}{k}} - 1)^2 \varepsilon^{\frac{1}{k}}} + 1\right] + 1.$

Пример 5. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot [|a|] \cdot ([|a|] + 1) \cdot \ldots \cdot n} \leq$$

$$\leq \frac{|a|^n}{[|a|]! \cdot ([|a|] + 1)^{n - [|a|]}} = \frac{([|a|] + 1)^{[|a|]}}{[|a|]!} \cdot \left(\frac{|a|}{[|a|] + 1}\right)^n < \varepsilon$$

при любом $n > N_\varepsilon = \left[\log_{\frac{|a|}{[|a|]+1}} \left(\varepsilon \cdot \dfrac{[|a|]!}{([|a|] + 1)^{[|a|]}}\right)\right] + 1.$

Пример 6. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Так как $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!} = 0$, то $\exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{n!} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n!} < \varepsilon^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon.$$

Теорема (о единственности предела). *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство (от противного). Пусть существует два предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, причем $a \neq b$ и $a < b$, тогда для $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$. Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда члены последовательности с номерами $n > N$ должны оказаться в непересекающихся интервалах $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Полученное противоречие означает, что $a = b$. **Теорема доказана.**

Замечание. Отбрасывание или добавление конечного числа членов последовательности не меняет ее сходимости или расходимости.

Теорема (линейные свойства предела). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *то существуют пределы последовательностей* $\{ca_n\}$, $c \in R$, *и* $\{a_n \pm b_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

Доказательство. В силу свойств модуля справедливо равенство

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a|.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \quad c \neq 0,$$

тогда для всех членов последовательности $\{ca_n\}$ с номерами $n > N_1$ справедливо неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

которое, в силу определения предела последовательности, означает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$.

По свойствам модуля справедливо неравенство

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ справедливо неравенство

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

которое и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. **Теорема доказана.**

2.2. Свойства предела, связанные с неравенствами

Теорема 1 (о сохранении знака неравенства). *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $a > p$ $(a < q)$, *то* $\exists N$ *такой, что* $\forall n > N$ *выполняется неравенство* $a_n > p$ $(a_n < q)$.

Доказательство. Пусть $a > p$, тогда для $\varepsilon = a - p > 0$ $\exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| <$ $< \varepsilon$ или

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad p < a_n < 2a - p \quad \Rightarrow \quad p < a_n.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (монотонность предела). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *и* $a_n \leq b_n$ $\forall n > N_0$, *тогда* $a \leq b$.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, тогда $\forall n > N$

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon \quad\Rightarrow\quad a - \varepsilon < b + \varepsilon,$$

отсюда в силу произвольности ε получаем требуемое неравенство $a \le b$.

Действительно, если $a > b$, то, выбрав $\varepsilon_1 = \dfrac{a-b}{3} > 0$, получим неравенство $b + \varepsilon_1 < a - \varepsilon_1$, противоречащее полученному выше. **Теорема 2 доказана.**

Полагая в этой теореме $a_n = M$, получим

Следствие. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *и* $b_n \ge M\ \ \forall n > N_0$, *тогда* $b \ge M$.

Теорема 3 (о двух ограничивающих последовательностях). *Если существуют два предела* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ *и* $\forall n > N_0$ *выполняется неравенство* $a_n \le b_n \le c_n$, *тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|c_n - a| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, тогда $\forall n > N$

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

Теорема 3 доказана.

Пример 1. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0)$.

Рассмотрим два случая. Первый случай $a \ge 1$, тогда $\sqrt[n]{a} \ge 1$, и рассмотрим представление $\sqrt[n]{a} = 1 + \beta_n$, где $\beta_n \ge 0$. Отсюда с помощью формулы бинома Ньютона получаем оценку

$$a = (1 + \beta_n)^n \ge C_n^2 \beta_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\beta_n^2 \quad \text{при} \quad n \ge 2$$

или

$$\beta_n \le \sqrt{\frac{2a}{n(n-1)}}.$$

Таким образом,

$$1 \le \sqrt[n]{a} = 1 + \beta_n \le 1 + \sqrt{\frac{2a}{n(n-1)}} \quad \text{при} \quad n \ge 2.$$

В обозначениях теоремы 3 $a_n = 1$, $b_n = \sqrt[n]{a}$, $c_n = 1 + \sqrt{\frac{2a}{n(n-1)}}$, и поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, то в силу теоремы о двух ограничивающих последовательностях получаем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Второй случай $0 < a < 1$, тогда $a = \frac{1}{k}$, здесь $k \in R_+$ и $k > 1$. Далее, рассуждая аналогично, получаем

$$1 \ge \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{k}} = \frac{1}{1 + \beta_n} \ge \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2k}{n(n-1)}}}.$$

В обозначениях $c_n = 1$, $b_n = \sqrt[n]{a}$, $a_n = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\frac{2k}{n(n-1)}}}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Пример 2. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Дублированием рассуждений из предыдущего примера получаем

$$1 \le \sqrt[n]{n} = 1 + \beta_n \le 1 + \sqrt{\frac{2n}{n(n-1)}} = 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Пример 3. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$ $(a > 1)$.

Из соотношений

$$0 \le \frac{\log_a n}{n} = \log_a \sqrt[n]{n} \le \log_a \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

получаем доказываемое равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$.

Пример 4. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Из неравенства

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} < \frac{1}{n}$$

получаем требуемое.

Пример 5. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

Общий член числовой последовательности

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

можно оценить сверху и снизу следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le b_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = c_n.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, то по теореме о двух ограничивающих последовательностях получаем требуемое равенство.

Пример 6. Доказать равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = 1.$$

Для получения оценки снизу общего члена числовой последовательности $b_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ воспользуемся неравенством Бернулли (см. § 1.3):

$$c_n = 1 > b_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n} = a_n.$$

Отсюда получаем первое предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1.$

Оценку сверху общего члена числовой последовательности $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ получим с помощью вспомогательного неравенства $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \leq e^{n\cdot\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n}} = c_n.$$

Оценку снизу получим с помощью неравенства Бернулли:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n} = a_n,$$

таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1$. Два других предельных равенства доказываются аналогично.

Пример 7. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

Сначала получим оценку снизу общего члена числовой последовательности

$$b_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n.$$

Оценку сверху получим с помощью неравенства из примера § 1.3

$$b_n \leq \frac{1}{n}\left(2\sqrt{n} - 1\right) = \frac{2\sqrt{n} - 1}{n} = c_n,$$

откуда вытекает требуемое равенство.

2.3. Необходимое условие сходимости последовательности. Теоремы о пределе произведения и частного сходящихся последовательностей

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) если существует такое число p (или q), что $\forall n \in N$ $a_n \leq p$ (или $a_n \geq q$).

Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной.*

Теорема (необходимый признак сходимости числовой последовательности). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда для $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство $|a_n - a| < 1$ или $a - 1 < a_n < a + 1$. Обозначим

$$p = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}, a - 1\},$$

$$q = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}, a + 1\},$$

тогда $\forall n \in N$ $p \leq a_n \leq q$. **Теорема доказана.**

Пример. Последовательность $a_n = (-1)^n$ является ограниченной и расходящейся.

Теорема (о пределе произведения). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и*

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *то последовательность* $\{a_n \cdot b_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

Доказательство. В силу свойств модуля справедливо неравенство

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n \cdot b_n - a \cdot b_n) + (a \cdot b_n - a \cdot b)| \le$$

$$\le |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Поскольку последовательность $\{b_n\}$ сходится, то в силу необходимого признака сходимости, она ограничена, т. е. существует константа $L > 0$ такая, что $\forall n \in N \ \ |b_n| \le L$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|} \quad (\text{при } \ a \ne 0),$$

тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ справедливо неравенство

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon,$$

которое и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Если $a = 0$, то

$$0 \le |a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < L \cdot |a_n|,$$

далее по правилу двух ограничивающих последовательностей получаем $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$. **Теорема доказана.**

Теорема (об ограниченности обратной последовательности). *Если существует предел последовательности* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *и* $b_n \ne 0 \ \ \forall n \in N$, $b \ne 0$, *то последовательность* $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ *ограничена.*

Доказательство. Так как $b \neq 0$, пусть для определенности $b > 0$, тогда $b > \frac{b}{2} > 0$ и по теореме о сохранении знака неравенства (см. § 2.2) $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство $b_n > \frac{b}{2} > 0$, отсюда $0 < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$ $\forall n > N_1$. Обозначим

$$p = \min\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}}, 0\right\},$$

$$q = \max\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}}, \frac{2}{b}\right\},$$

тогда $\forall n \in N \quad p \leq \frac{1}{b_n} \leq q$. **Теорема доказана.**

Теорема (о пределе частного). *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, причем $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*

Доказательство. В силу свойств модуля справедливо неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n}\right| = \frac{|a_n \cdot b - a \cdot b_n|}{|b| \cdot |b_n|} =$$

$$= \frac{|(a_n \cdot b - a \cdot b) + (a \cdot b - a \cdot b_n|}{|b| \cdot |b_n|} \leq$$

$$\leq \frac{|b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|}.$$

Поскольку $b_n \neq 0$, $b \neq 0$, то в силу теоремы об ограниченности обратной последовательности существует положительная константа $M > 0$ такая, что $\forall n \in N \quad \frac{1}{|b_n|} =$

$= \left|\dfrac{1}{b_n}\right| \leq M$. Поэтому

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq M \cdot |a_n - a| + M \cdot \frac{|a|}{|b|} \cdot |b_n - b|.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2M|a|} \cdot \varepsilon \quad (\text{при}\ \ a \neq 0),$$

тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Если $a = 0$, то

$$0 \leq \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq M \cdot |a_n|,$$

далее по правилу двух ограничивающих последовательностей получаем требуемое предельное равенство. **Теорема доказана.**

2.4. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности. Число e. Теорема Штольца

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $\forall n \in N$ $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$). Если выполняются строгие неравенства, то последовательность называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*). Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, а строго возрастающие и строго убывающие *строго монотонными*.

Теорема Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности). *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *обладает свойствами:*

а) $\{a_n\}$ *ограничена сверху* (*снизу*);

б) $\exists N$ *такой, что* $\forall n > N \quad a_{n+1} \geq a_n \ (a_{n+1} \leq a_n)$,

тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $a = \sup A_N$ $(a = \inf A_N)$, *где* $A_N \equiv \{a_N, a_{N+1}, \ldots\}$.

Доказательство. В силу ограниченности сверху последовательности $\{a_n\}$ существует вещественное число b такое, что $a_n \leq b \ \forall n \in N$, тогда множество A_N ограничено сверху. По теореме о верхних гранях (см. § 1.5) существует $a = \sup A_N$, причем $a_n \leq a \ \forall n \in N$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно, тогда по определению верхней грани числового множества (см. § 1.5) существует номер $N_\varepsilon \geq N$ такой, что $a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a$, поэтому $\forall n \geq N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Полученные оценки и означают, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. **Теорема доказана.**

Пример 1 (число e**).** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, здесь $e = 2{,}718281828459045\ldots$ — иррациональное число, введенное Леонардом Эйлера, называемое иногда числом Непера (неперово число).

Рассмотрим числовую последовательность $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Покажем, что a_n — монотонно возрастающая последовательность. Рассмотрим отношение двух последовательных членов этой последовательности

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

Воспользуемся неравенством Бернулли (см. § 1.3):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1,$$

т. е. $a_{n+1} \geq a_n > 0$ и $\{a_n\}$ монотонно возрастает.

Аналогично можно убедиться, что числовая последовательность $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, т. е. $0 < b_2 \leq b_n$ при $n \geq 2$ или $\frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{b_2}$.

Теперь покажем ограниченность $\{a_n\}$:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{b_n} \leq \frac{1}{b_2}.$$

Отсюда в силу теоремы Вейерштрасса получаем сходимость исследуемой последовательности $\{a_n\}$. Воспользовавшись неравенством Бернулли (см. § 1.3), получим

$$1 \geq b_n \cdot a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n},$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} b_n \cdot a_n = 1.$$

По теореме о пределе частного

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n \cdot a_n}{a_n} = \frac{1}{e},$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

В действительности имеет место предельное равенство более общего вида

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^\alpha \quad \forall\alpha\in R.$$

Дублированием всех проведенных выше рассуждений можно убедиться, что числовая последовательность $c_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ является монотонно убывающей, причем

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

Пример 2 (число e). Пусть

$$c_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!},$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=e$.

Действительно, $\{c_n\}$ монотонно возрастает и

$$c_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

ограничена сверху. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$.

Далее по формуле бинома Ньютона (см. § 1.3)

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

очевидно $a_n \le c_n$, поэтому по теореме о монотонности предела (см. § 2.2) $e \le c$.

С другой стороны, для любого фиксированного $k \in N$ при $n \ge k$ имеем неравенство

$$a_n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $e \ge c_k$. Отсюда, после повторного предельного перехода при $k \to \infty$ имеем $e \ge c$. Поэтому $c = e$.

Пример 3 (итерационная формула Герона). Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0$, $x_1 > 0$.

Покажем, что $\{x_n\}$ — убывающая, ограниченная снизу последовательность.

Рассмотрим разность

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a - 2x_n\sqrt{a}}{2x_n} =$$
$$= \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} > 0,$$

т. е. $x_{n+1} > \sqrt{a}$ и ограниченность снизу доказана, причем $x_{n+1}^2 > a$. Заметим, что если $x_{n+1} = \sqrt{a}$, то последовательность $\{x_n\}$ стационарна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Рассмотрим еще одну разность

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} > 0,$$

отсюда следует $x_n > x_{n+1}$, т. е. $\{x_n\}$ — строго убывающая последовательность и по теореме Вейерштрасса является сходящейся. Обозначим ее предел через x_0 и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в исходном рекуррентном соотношении, тогда

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right);$$

$$2x_0 = x_0 + \frac{a}{x_0};$$

$$x_0 - \frac{a}{x_0} = 0;$$

$$x_0^2 = a \Rightarrow x_0 = \sqrt{a}.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

При вычислении квадратного корня из положительного числа по итерационной формуле Герона число верных десятичных знаков быстро растет, причем если в процессе вычисления на каком-то этапе будет допущена ошибка, то в дальнейшем этот сбой автоматически корректируется, т. е. мы рассмотрели пример саморегулирующегося итерационного процесса.

Пример 4. По схеме примера 3 исследуем числовую последовательность

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{b}{a_n^2}\right), \quad b > 0, \quad a_1 > 0.$$

Преобразуем разность

$$a_{n+1} - \sqrt[3]{b} = \frac{2}{3}a_n + \frac{b}{3a_n^2} - \sqrt[3]{b} = \frac{2a_n^3 + b - 3a_n^2\sqrt[3]{b}}{3a_n^2} =$$

$$= \frac{2\left(a_n^3 - a_n^2\sqrt[3]{b}\right) + \left(b - a_n^2\sqrt[3]{b}\right)}{3a_n^2} =$$

$$= \frac{2a_n^2\left(a_n - \sqrt[3]{b}\right) - \sqrt[3]{b}\left(a_n^2 - \sqrt[3]{b^2}\right)}{3a_n^2} =$$

$$= \frac{\left(a_n - \sqrt[3]{b}\right)\left(2a_n^2 - \sqrt[3]{b}a_n - \sqrt[3]{b^2}\right)}{3a_n^2} =$$

$$= \frac{\left(a_n - \sqrt[3]{b}\right)\left(a_n - \sqrt[3]{b}\right)\left(2a_n + \sqrt[3]{b}\right)}{3a_n^2} =$$

$$= \frac{\left(a_n - \sqrt[3]{b}\right)^2\left(2a_n + \sqrt[3]{b}\right)}{3a_n^2} > 0 \;\Rightarrow\; a_{n+1} > \sqrt[3]{b},$$

т. е. числовая последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу. Для исследования монотонности рассмотрим разность

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(\frac{2}{3}a_n + \frac{b}{3a_n^2}\right) = \frac{a_n}{3} - \frac{b}{3a_n^2} = \frac{a_n^3 - b}{3a_n^2} > 0,$$

т. е. последовательность является монотонно убывающей, а значит, сходящейся. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в исходном рекуррентном соотношении, получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{b}$. Таким образом, рассмотренная числовая последовательность дает еще один пример саморегулирующегося итерационного процесса.

Пример 5. Доказать сходимость числовой последовательности

$$z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Для доказательства монотонности и ограниченности этой последовательности воспользуемся некоторыми вспомогательными неравенствами, которые здесь и получим. В примере 1 было отмечено, что числовая последовательность $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ является монотонно убывающей, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ — монотонно возрастающей и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$, поэтому $a_n \le e \le c_n$. Прологарифмировав по основанию e это неравенство, получим

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le 1 \le (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

откуда и вытекает нужное нам вспомогательное неравенство

$$\frac{1}{n+1} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}.$$

Для доказательства монотонности последовательности $\{z_n\}$ рассмотрим разность

$$z_{n+1}-z_n = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le 0,$$

т. е. последовательность $\{z_n\}$ монотонно убывает. Теперь покажем ее ограниченность снизу

$$z_n \ge \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-$$

$$-\ln n = \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)-\ln n = \ln(n+1)-$$

$$-\ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \ge \frac{1}{n+1} > 0.$$

Таким образом, в силу теоремы Вейерштрасса последовательность $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = C = 0{,}577216\ldots$ — постоянная Эйлера.

Пример 6. Доказать сходимость числовых последовательностей:

$$a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2},$$

$$b_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, \quad c_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

$$d_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right),$$

$$x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Очевидно последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает, покажем ее ограниченность сверху:

$$a_n \le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$$

$$= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2-\frac{1}{n} < 2.$$

Все члены числовой последовательности $\{b_n\}$ положительны, т. е. эта последовательность ограничена снизу. Для доказательства ее монотонности рассмотрим отношение двух последовательных членов

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+2}{2n+3} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. $\{b_n\}$ монотонно убывает. Последовательность $\{c_n\}$ исследуется точно так же, как $\{b_n\}$.

Последовательность $\{d_n\}$ монотонно возрастает, так как каждый из множителей больше 1. Докажем ее ограниченность сверху:

$$\ln d_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1,$$

т. е. $d_n < e$.

Последовательность $\{x_n\}$ является монотонно убывающей и $0 < x_n < 1$, т. е. по теореме Вейерштрасса сходится.

Теорема Штольца. *Пусть для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ выполнены условия:*

а) $b_{n+1} > b_n > 0$, *т. е. $\{b_n\}$ монотонно возрастает*;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

в) *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$,

тогда существует предел отношения $\dfrac{a_n}{b_n}$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, то $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon \in N$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < l + \frac{\varepsilon}{2},$$

в силу условия а) теоремы $b_{n+1} - b_n > 0$, поэтому $\forall n > N_\varepsilon$

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n),$$

т. е. имеем $n - N_\varepsilon$ неравенств

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n),$$

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n-1}),$$

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N_\varepsilon+1} - b_{N_\varepsilon}) < a_{N_\varepsilon+1} - a_{N_\varepsilon} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N_\varepsilon+1} - b_{N_\varepsilon}).$$

Сложим все эти неравенства почленно:

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_{N_\varepsilon}) < a_{n+1} - a_{N_\varepsilon} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_{N_\varepsilon}).$$

Так как все $b_{n+1} > 0$, то

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}}\right) < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}}\right)$$

или
$$\frac{a_{N_\varepsilon} - lb_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b_{n+1} - b_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - l <$$
$$< \frac{a_{N_\varepsilon} - lb_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b_{n+1} - b_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}}.$$

Из первого условия теоремы следует $0 < \dfrac{b_{n+1} - b_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} < 1$, поэтому
$$\frac{a_{N_\varepsilon} - lb_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - l < \frac{a_{N_\varepsilon} - lb_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из второго условия теоремы следует
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{N_\varepsilon} - lb_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} = 0,$$
т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ справедливо неравенство
$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{N_\varepsilon} - lb_{N_\varepsilon}}{b_{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем обозначение $N = \max(N_1,\, N_\varepsilon)$, тогда $\forall n > N$
$$-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - l < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Последнее наблюдение представляет собой развернутую запись предельного равенства
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Теорема Штольца доказана.

С помощью теоремы Штольца вычислим следующие пределы.

Пример 7. При любом натуральном k вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

В обозначениях теоремы Штольца

$$a_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k, \quad b_n = n^{k+1},$$

тогда выполнены все условия теоремы Штольца, и значит

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} - n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{n\left(1+(k+1)\frac{1}{n} + \sum\limits_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^i}\right) - n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{n + (k+1) + \sum\limits_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^{i-1}} - n} = \frac{1}{k+1}.$$

Пример 8. При любом натуральном k вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right).$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \dots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)\cdot n^k},$$

положим

$$a_n = (k+1)(1^k + 2^k + \dots + n^k) - n^{k+1}, \quad b_n = (k+1)\cdot n^k,$$

тогда по теореме Штольца

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(n+1)^k - (n+1)^{k+1} + n^{k+1}}{(k+1)\cdot\left((n+1)^k - n^k\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} + n}{(k+1)\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right)}.$$

Но

$$(k+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} + n =$$

$$= (k+1)\left(1 + k\frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{k} C_k^i \frac{1}{n^i}\right) -$$

$$- n\left(1 + (k+1)\frac{1}{n} + \frac{(k+1)k}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \sum_{i=3}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^i}\right) + n =$$

$$= \frac{(k+1)k}{n} + (k+1)\sum_{i=2}^{k} C_k^i \frac{1}{n^i} - \frac{(k+1)k}{2n} + \sum_{i=3}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^{i-1}} =$$

$$= \frac{(k+1)k}{2n} + \sum_{i=2}^{k} \left((k+1)C_k^i + C_{k+1}^{i+1}\right)\frac{1}{n^i}$$

и

$$(k+1)\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) = (k+1)\left(1 + k\frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{k} C_k^i \frac{1}{n^i} - 1\right) =$$

$$= \frac{(k+1)k}{n} + (k+1)\sum_{i=2}^{k} C_k^i \frac{1}{n^i},$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(k+1)k}{2n} + \sum\limits_{i=2}^{k}\left((k+1)C_k^i + C_{k+1}^{i+1}\right)\frac{1}{n^i}}{\frac{(k+1)k}{n} + (k+1)\sum\limits_{i=2}^{k} C_k^i \frac{1}{n^i}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 9. При любом натуральном k вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k}{n^{k+1}}.$$

В обозначениях теоремы Штольца

$$a_n = 1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k, \quad b_n = n^{k+1},$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^k \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^k}{n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^k \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^k}{n\left(\left(1 + (k+1)\frac{1}{n} + \sum\limits_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^i}\right) - 1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^k \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^k}{(k+1) + \sum\limits_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^{i-1}}} = \frac{2^k}{k+1}.$$

2.5. Подпоследовательности. Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса

Пусть дана некоторая последовательность $\{a_n\}$, наряду с ней рассмотрим возрастающую последовательность целых положительных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, в результате получаем новую последовательность $\{a_{k_n}\}$, которую принято называть *подпоследовательностью* исходной последовательности $\{a_n\}$, очевидно $k_n \geq n$. Если подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$ сходится, то ее предел называют *частичным пределом* последовательности $\{a_n\}$.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу a, то и любая ее подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$ сходится к тому же пределу a.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Так как $k_n \geq n$, то $\forall k_n \geq k_{N_\varepsilon} > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, а это означает $\lim\limits_{k_n\to\infty} a_{k_n} = a$. **Теорема доказана.**

Пример. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 \pm \dfrac{k}{n}\right)^n$, $k \in N$. Рассмотрим числовую последовательность $a_n = \left(1 \pm \dfrac{k}{n}\right)^n$. Так же, как в примере 1 из § 2.4, можно убедиться, что это монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность, поэтому в силу теоремы Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ сходится. Рассмотрим подпоследовательность $a_{km} = \left(1 \pm \dfrac{1}{m}\right)^{km}$, $m \in N$. Отсюда по теореме о пределе произведения получаем

$$\lim_{m\to\infty} a_{km} = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 \pm \frac{1}{m}\right)^m\right)^k = e^{\pm k},$$

поэтому в соответствии с только что доказанной теоремой $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\pm k}$.

Воспользуемся полученным результатом для вычисления следующего предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{5}{n}\right)^n} = \frac{e^4}{e^{-5}} = e^9.$$

Теорема Больцано – Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е. $\forall n \in N\ p \leq a_n \leq q$. Разделим отрезок

$[p, q]$ на две равные части, в одной из них окажется бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$, обозначим его $[p_1, q_1] \subset [p, q]$ и выберем первый член последовательности a_{k_1}, попавший в $[p_1, q_1]$. Разделим $[p_1, q_1]$ пополам, в одну из частей попадает бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$, обозначим ее $[p_2, q_2] \subset [p_1, q_1]$ и выберем член a_{k_2}, попавший в $[p_2, q_2]$ и имеющий номер $k_2 > k_1$, таким образом мы выберем второй член подпоследовательности и т. д. В результате мы имеем последовательность вложенных отрезков $[p_n, q_n]$, причем $q_n - p_n = \dfrac{q-p}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. В силу следствия из принципа вложенных отрезков (см. § 1.5) существует единственная точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n]$. Поскольку $a_{k_n} \in [p_n, q_n]$, то

$$|a_{k_n} - c| \leq |q_n - p_n| = \frac{q-p}{2^n} < \varepsilon$$

при любом $n > N_\varepsilon = \left[\log_2 \dfrac{q-p}{\varepsilon}\right] + 1$, т. е. подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$ сходится к числу c. **Теорема Больцано – Вейерштрасса доказана.**

2.6. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы числовая последовательность $\{a_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$

выполняется неравенство $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что тогда и $\forall p \in N$ член последовательности $\{a_{n+p}\}$ при любом $n > N_\varepsilon$ удовлетворяет неравенству $|a_{n+p} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда для таких n и p получаем неравенство

$$|a_n - a_{n+p}| \le |a_n - a| + |a_{n+p} - a| < \varepsilon,$$

означающее фундаментальность последовательности $\{a_n\}$.

Достаточность. Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, т. е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_n - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n+p} < a_n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем некоторый номер $N_1 > N_\varepsilon$, тогда $\forall p \in N$

$$a_{N_1} - \frac{\varepsilon}{2} < a_{N_1+p} < a_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2},$$

а это означает, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена, т. е. $m \le a_n \le M$, где

$$m = \min\left\{a_1,\, a_2,\, \ldots, a_{N_1}, a_{N_1} - \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$M = \max\left\{a_1,\, a_2,\, \ldots, a_{N_1}, a_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

В силу теоремы Больцано – Вейерштрасса у последовательности $\{a_n\}$ существует сходящая подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ или $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists M_\varepsilon$ такой, что $\forall k_n > M_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_{k_n} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $N = \max(N_\varepsilon,\, M_\varepsilon)$, тогда $\forall n > N$ и $\forall k_n > N$ справедливо неравенство

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Критерий Коши доказан.

Теорема (критерий Коши расходимости числовой последовательности). *Для расходимости числовой последовательности $\{a_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы она не была фундаментальной, т. е. $\exists\varepsilon > 0$ такое, что $\forall N$ найдутся номера $n > N$ и $m > N$ такие, что $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$.*

Пример 1. Доказать расходимость последовательности $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Составим и оценим разность

$$a_{2m} - a_m =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ слагаемых}} > \underbrace{\frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 > 0,$$

таким образом, $\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ такое, что $\forall N$ для номеров $m > N$ и $2m > N$ справедливо неравенство $a_{2m} - a_m > \frac{1}{2}$, что в силу критерия Коши и означает расходимость последовательности $\{a_n\}$.

Пример 2 (уравнение Иоганна Кеплера (1571–1630)). Рассмотрим уравнение Кеплера движения планет по эллиптической орбите

$$E - e\sin E = y \quad (0 < e < 1 \text{ — эксцентриситет орбиты}).$$

Зададим рекуррентную последовательность

$$E_0 = y, \quad E_1 = y + e\sin E_0, \quad \ldots, \quad E_n = y + e\sin E_{n-1}.$$

Покажем, что эта последовательность $\{E_n\}$: а) сходится; б) ее предел $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ является решением уравнения Кеплера; в) ξ является единственным решением уравнения Кеплера.

Для доказательства сходимости воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим разность

$$|E_{n+p} - E_n| = e|\sin E_{n+p-1} - \sin E_{n-1}| =$$

$$= e \cdot \left| 2 \cdot \sin \frac{E_{n+p-1} - E_{n-1}}{2} \cdot \cos \frac{E_{n+p-1} + E_{n-1}}{2} \right| \le$$

$$\le e \cdot 2 \cdot \left| \frac{E_{n+p-1} - E_{n-1}}{2} \right| = e \cdot |E_{n+p-1} - E_{n-1}| \le \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{n-1 \text{ раз}} \le$$

$$\le e^n |E_p - E_0| = e^n |E_p - y| = e^{n+1} |\sin E_{p-1}| \le e^{n+1}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $e^{n+1} < \varepsilon$ выполняется при всех $n > N_\varepsilon = [\log_e \varepsilon]$, следовательно, при всех таких n и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $|E_{n+p} - E_n| < \varepsilon$, означающее фундаментальность последовательности $\{E_n\}$, а значит, и ее сходимость.

Обозначим предел через $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ и осуществим предельный переход в рекуррентном соотношении для последовательности $\{E_n\}$, тогда

$$\xi - e \cdot \sin \xi = y,$$

т. е. ξ действительно является решением уравнения Кеплера. Предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sin E_n = \sin \xi$ следует из неравенства

$$0 \le |\sin E_n - \sin \xi| \le |E_n - \xi|$$

и теоремы о двух ограничивающих последовательностях (см. теорему 3 из § 2.2).

Покажем единственность этого решения методом от противного. Пусть ξ_1 — какое-либо другое решение ($\xi_1 \ne \xi$) уравнения Кеплера

$$\xi_1 - e \cdot \sin \xi_1 = y,$$

тогда

$$\xi - \xi_1 = e \cdot (\sin \xi - \sin \xi_1),$$

$$|\xi - \xi_1| = e \cdot |\sin \xi - \sin \xi_1| \le e \cdot |\xi - \xi_1|,$$

но если $\xi \ne \xi_1$, то $|\xi - \xi_1| > 0$ и получаем неравенство $1 \le e$, противоречащее условиям задачи (ее физическому смыслу).

Решение ξ можно найти методом последовательных приближений с любой наперед заданной степенью точности. Действительно, так как

$$E_n = y + e \sin E_{n-1}, \quad \xi = y + e \sin \xi,$$

то

$$|E_n - \xi| = e \cdot |\sin E_{n-1} - \sin \xi| \le e \cdot |E_{n-1} - \xi| \le \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{n-1 \text{ раз}} \le$$

$$\le e^n \cdot |E_0 - \xi| = e^n \cdot |y - \xi| = e^n \cdot |e \sin \xi| \le e^{n+1}.$$

Отсюда получаем, что для обеспечения точности приближения $\varepsilon > 0$ необходимо осуществить $N_\varepsilon = [\log_e \varepsilon]$ итераций.

2.7. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа $M > 0$ найдется такой член последовательности a_n, что выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\forall M > 0\ \exists N_M$ такой, что $\forall n > N_M$ выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, но не наоборот. Например, последовательность $\left\{1;\ \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{3};\ 3;\ \frac{1}{4};\ 4;\ \ldots,\ \frac{1}{n};\ n;\ \ldots\right\}$ неограничена, но не является бесконечно большой.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно маленькой*, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

Очевидно, что для бесконечно маленькой последовательности справедливо предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т. е. $\{a_n\}$ — сходящаяся последовательность, а значит, в силу необходимого признака сходимости числовых последовательностей, ограничена (см. § 2.3). Бесконечно малые последовательности обладают не только всем набором арифметических свойств, но и справедлива следующая

Теорема. *Если числовая последовательность* $\{a_n\}$ *ограничена, а последовательность* $\{\alpha_n\}$ *бесконечно малая, то их произведение* $\{a_n \cdot \alpha_n\}$ *является бесконечно малой последовательностью.*

Справедливость этого утверждения следует из неравенства

$$0 \leq |a_n \cdot \alpha_n| = |a_n| \cdot |\alpha_n| \leq M \cdot |\alpha_n|$$

и теоремы о двух ограничивающих последовательностях (см. теорему 3 из § 2.2).

Теорема (о специальном представлении членов сходящейся последовательности). *Если числовая последовательность* $\{a_n\}$ *сходится (т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$*), то существует такая бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n\}$ *(т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$*), что* $a_n = a + \alpha_n$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, но это означает, что числовая последовательность $\alpha_n = a_n - a$ является бесконечно малой и, следовательно, $a_n = a + \alpha_n$. **Теорема доказана.**

Теорема. *Числовая последовательность* $\{a_n\}$ *является бесконечно большой, при* $a_n \neq 0$*, тогда и только тогда,* *когда числовая последовательность* $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ *является бесконечно малой.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ — бесконечно большая и $a_n \neq 0$, тогда $\forall M > 0\ \exists N_M$ такой, что $\forall n > N_M$ выполняется неравенство $|a_n| > M$ или $0 < \left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \dfrac{1}{M}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Пусть $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ — бесконечно малая, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ или $|a_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. $\{a_n\}$ является бесконечно большой. **Теорема доказана.**

Пример 1. В §§ 2.1, 2.2 были доказаны предельные равенства при $a > 1,\ k > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

означающие, что последовательности $\dfrac{\log_a n}{n^k}, \dfrac{n^k}{a^n}, \dfrac{a^n}{n!}, \dfrac{n!}{n^n}$ являются бесконечно малыми, тогда обратные к ним $\dfrac{n^k}{\log_a n}, \dfrac{a^n}{n^k}, \dfrac{n!}{a^n}, \dfrac{n^n}{n!}$ являются бесконечно большими. Последовательности $\log_a n,\ n^k,\ a^n,\ n!,\ n^n$ тоже являются бесконечно большими, но имеют разный порядок роста, что принято записывать следующим образом: $\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, здесь знак $\ll$ означает бесконечно большую более высокого порядка роста.

Пример 2. Доказать равенства

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=0.$$

В примере 5 из § 2.4 была доказана сходимость числовой последовательности

$$z_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = C = 0{,}577216\ldots$ — постоянная Эйлера. По теореме о специальном представлении членов сходящейся числовой последовательности

$$z_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n=C+\alpha_n$$

или

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\alpha_n,$$

здесь α_n — бесконечно малая последовательность. Отсюда получаем

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=x_{2n}-x_n=$$

$$=C+\ln 2n+\alpha_{2n}-C-\ln n-\alpha_n=\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n)=\ln 2.$

Соответственно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{C+\ln n+\alpha_n}{n}=0.$$

3. Предел функции. Непрерывность функции

3.1. Понятие предела функции в точке. Односторонние пределы

Определение (*по Гейне*). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой числовой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$, соответствующая числовая последовательность $f(x_n) \to b$.

Определение (*по Коши*). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x :$ $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Записывается это так: $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Теорема. *Понятия предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x :$ $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Поэтому для любой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$, для $\delta_\varepsilon > 0$ $\exists N_{\delta_\varepsilon}$ такой, что $\forall n > N_{\delta_\varepsilon}$ выполняется неравенство $0 < |x_n - a| < \delta_\varepsilon$, но для таких x_n (в силу определения Коши) справедливо неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, которое и означает сходимость $f(x_n) \to b$ или $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Гейне.

Пусть $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Гейне. Предположим, что b не является $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши, это означает существование такого положительного $\varepsilon_0 > 0$, что $\forall \delta > 0$ найдется $x :$ $0 < |x - a| < \delta$, для которого выполняется неравенство $|f(x) - b| \geq \varepsilon_0$. Рассмотрим последовательность $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, для каждого δ_n найдется $x_n :$ $0 < |x_n - a| < \delta_n$ такое, что справедливо неравенство $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$. Поскольку числовая последовательность $x_n \to a$, $x_n \neq a$, то в силу определения предела функции по Гейне $f(x_n) \to b$. Однако выше мы получили семейство неравенств $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$, означающее $f(x_n) \not\to b$. Полученное противоречие означает, что $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши. **Теорема доказана.**

Определение предела функции по Гейне удобно применять при доказательстве отсутствия предела. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Для функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рационально;} \\ 0, & x \text{ — иррационально} \end{cases}$$

при любом $a \in R$ не существует $\lim\limits_{x \to a} D(x)$. Действительно, рассмотрим две последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$, x_n — рациональные, и $y_n \to a$, $y_n \neq a$, y_n — иррациональные. По теоремам о плотности Q в R и $R \setminus Q$ в R (см. §§ 1.4, 1.7) такие последовательности всегда существуют. Тогда $D(x_n) = 1 \to 1$ и $D(y_n) = 0 \to 0$, что в соответствии с определением предела функции по Гейне и означает отсутствие предела.

Пример 2. Не существует предела $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$.
Действительно, рассмотрим последовательности

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n},$$

тогда $\sin \dfrac{1}{x_n} = 1 \to 1$ и $\sin \dfrac{1}{y_n} = -1 \to -1$, что и доказывает отсутствие предела.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin \dfrac{1}{x} \right) = 0$.

Действительно, для любой числовой последовательности $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, соответствующая числовая последовательность $x_n \sin \dfrac{1}{x_n} \to 0$ по теореме о пределе произведения бесконечно малой и ограниченной последовательностей (см. § 2.7).

Определение (*по Гейне*). Число b называется *правым* (*левым*) *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой числовой последовательности $x_n \to a+$, $x_n > a$ ($x_n \to a-$, $x_n < a$) соответствующая числовая последовательность $f(x_n) \to b$.

Определение (*по Коши*). Число b называется *правым* (*левым*) *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x:\ 0 < x - a < \delta_\varepsilon$ $(0 < a - x < \delta_\varepsilon)$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначают эти пределы так: $f(a + 0) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ и $f(a - 0) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$.

Очевидно, если существует $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (еще его называют двусторонним), то существуют и равны односторонние пределы, причем

$$b = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x).$$

Обратное утверждение сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Если у функции $y = f(x)$ существуют в точке a оба односторонних предела и они равны, то у функции $y = f(x)$ существует в точке a двусторонний предел и он равен общему значению односторонних пределов.*

Доказательство. Пусть $b = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x:\ 0 < x - a < \delta_\varepsilon$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ и $\forall x:\ 0 < a - x < \delta_\varepsilon$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Для указанных x справедливо неравенство $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ и $x \neq a$, причем $|f(x) - b| < \varepsilon$. Но это означает $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши. **Теорема доказана.**

Аналогично можно ввести понятия пределов при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и получить для них соответствующие утверждения.

3.2. Свойства предела функции

Теорема (арифметические свойства предела функции). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot c$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ $(g(x) \neq 0,\ c \neq 0)$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то для любой числовой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$, соответствующие числовые последовательности $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$. Тогда в силу арифметических свойств предела числовой последовательности $f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$, $f(x_n)\cdot g(x_n) \to b\cdot c$, $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{b}{c}$, что в соответствии с определением предела функции по Гейне и означает требуемые предельные равенства. **Теорема доказана.**

Теорема (о сохранении знака неравенства). *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $b > p$ $(b < q)$, *то* $\exists\,\delta$*-окрестность точки* a : $0 < |x - a| < \delta$ *такая, что* $\forall x$ *из этой окрестности* $0 < |x - a| < \delta$ *выполняется неравенство* $f(x) > p$ $(f(x) < q)$.

Доказательство. Пусть $b > p$, тогда для $\varepsilon = b - p > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $p = b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon = 2b - p$, т. е. $f(x) > p$. **Теорема доказана.**

Теорема (монотонность предела). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ *и в некоторой* δ_0*-окрестности точки* a : $0 < |x - a| < \delta_0$ *выполняется неравенство* $f(x) \leq g(x)$, *то* $b \leq c$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_1 > 0$ такое, что $\forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta_1$ выполняется неравенство $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, и $\exists\,\delta_2 > 0$ такое, что $\forall x: \ 0 < |x-a| < \delta_2$ выполняется неравенство $-\varepsilon < g(x) < c + \varepsilon$. Тогда если $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, то $\forall x:$ $0 < |x-a| < \delta$ выполняется тройное неравенство $b - \varepsilon < f(x) \le g(x) < c + \varepsilon$, т.е. $b - \varepsilon < c + \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $b \le c$. Действительно, если бы это было не так, т.е. $b > c$, то $\varepsilon_0 = b - c > 0$, и, выбирая $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{3}$, получим ложное неравенство $b - \dfrac{\varepsilon_0}{3} < c + \dfrac{\varepsilon_0}{3}$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и в некоторой* δ_0*-окрестности точки* a : $0 < |x-a| < \delta_0$ *выполняется неравенство* $f(x) \le m$, *то* $b \le m$.

Для доказательства необходимо положить в условиях теоремы $g(x) = m$.

Теорема (о двух ограничивающих функциях). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ *и в некоторой* δ_0*-окрестности точки* a : $0 < |x-a| < \delta_0$ *выполняется неравенство* $f(x) \le h(x) \le g(x)$, *то существует* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0$ такое, что $\forall x:\ 0 < |x-a| < \delta_1$ выполняется неравенство $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, и $\exists\delta_2 > 0$ такое, что $\forall x:$ $0 < |x-a| < \delta_2$ выполняется неравенство $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$. Тогда если $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, то $\forall x:\ 0 < |x-a| < \delta$ выполняется неравенство $b-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < b+\varepsilon$, которое и означает $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. **Теорема доказана.**

Теорема (о пределе сложной функции). *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, *причем в некоторой* δ*-окрестности точки* x_0 : $0 < |x-x_0| < \delta$ *выполняется неравенство* $g(x) \ne y_0$,

$\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = l$, *тогда* $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = l$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = l$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ такое, что $\forall y : \ 0 < |y - y_0| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(y) - l| < \varepsilon$. Для $\delta_1 > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ такое, что $\forall x : \ 0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $0 < |g(x) - y_0| < \delta_1$. Пусть теперь $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_2\}$, тогда $\forall x : \ 0 < |x - x_0| < \delta_3$ справедливо неравенство $0 < |f(g(x)) - l| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = l$. **Теорема доказана.**

Пример. В этой теореме условие $g(x) \neq y_0$ является существенным, что показывает следующий контрпример.

Пусть

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y = 0; \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$$

и $g(x) \equiv 0$, тогда если $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то $\lim\limits_{y \to y_0 = 0} f(y) = 0 = l$, однако $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} f(g(x)) = 1$, т. е. $l \neq 1$. Здесь $g(x) \equiv 0 \stackrel{!}{=} \stackrel{!}{=} y_0 = 0$.

3.3. Критерий Коши существования предела функции

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x', x'' : \ 0 < |x' - a| < \delta_\varepsilon$ и $0 < |x'' - a| < \delta_\varepsilon$ выполнялось бы неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (условие Коши).*

Доказательство. *Необходимость.* Воспользуемся определением предела функции по Коши. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x', x'' : \ 0 < |x' - a| < \delta_\varepsilon$ и $0 < |x'' - a| < \delta_\varepsilon$ выполняются неравенства $|f(x') - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x'') - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда для указанных x' и x'' получаем $|f(x') - f(x'')| \leq$ $\leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon$.

Достаточность. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть выполнено условие Коши. Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \to a$, $x_n \neq a$, тогда для $\delta_\varepsilon > 0$ $\exists N_{\delta_\varepsilon}$ такое, что $\forall n > N_{\delta_\varepsilon}$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta_\varepsilon$ и, соответственно, $\forall p \in N$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - a| < \delta_\varepsilon$. Отсюда для числовой последовательности $\{f(x_n)\}$ получаем $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$, т.е. $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной последовательностью, и значит существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Пусть $y_n \to a$, $y_n \neq a$, — другая такая последовательность, тогда новая последовательность $\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots\} \to a$ и для этой последовательности соответствующая последовательность значений

$$\{f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), f(x_3), f(y_3), \ldots\}$$

является фундаментальной, а значит, сходящейся, поэтому ее подпоследовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ имеют одинаковые пределы. **Теорема доказана.**

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0$ $\exists C_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x', x''$ таких, что $x' > C_\varepsilon$ и $x'' > C_\varepsilon$, выполнялось бы неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (условие Коши).*

3.4. Замечательные пределы

Теорема. *Справедливы следующие соотношения:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. а) Рассмотрим случай $x \to +\infty$, тогда $[x] \le x < [x]+1$ и

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

поэтому $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1$ такое, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < e+\varepsilon,$$

и $\exists N_2$ такое, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_1,\, N_2\}$, тогда $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon.$$

Если теперь $x > N$, то $[x] \geq N$, и значит при любом $x > N+1$ имеем

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Пусть теперь $x \to -\infty$, тогда поскольку

$$e = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y},$$

т. е. $f(y) = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} \to e$ при $y \to +\infty$.

Положим $y = g(x) = -x$, при $x \to -\infty$ $y = g(x) \to +\infty$, поэтому по теореме о пределе сложной функции (см. § 2.3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(g(x)) = e$, но

$$f(g(x)) = \left(1-\frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

б) Поскольку $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$, то полагаем $f(y) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \to e$ при $y \to \infty$ и введем новую переменную $y = g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда при $x \to 0$ $y \to \infty$ и по теореме о пределе сложной функции $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = e$, но

$$f(g(x)) = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

в) Поскольку $\lim\limits_{y\to e}\ln y = 1$, то полагаем $f(y) = \ln y \to 1$ при $y \to e$. Введем новую переменную $y = g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\to e$ при $x \to 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

г) Поскольку $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$, то полагаем $f(y) = \dfrac{\ln(1+y)}{y} \to 1$ при $y \to 0$. Введем новую переменную $y = g(x) = e^x - 1 \to 0$ при $x \to 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \frac{\ln(1+e^x-1)}{e^x-1} = \frac{x}{e^x-1}.$$

д) При $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ $\operatorname{tg} x < x < \sin x < 0$, отсюда при $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$. По теореме о двух ограничивающих функциях (см. § 3.2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Справедливы следующие соотношения:*

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Доказательство. а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right) = 1$.

б) Поскольку $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$, то полагаем $f(y) = \dfrac{\sin y}{y} \to 1$ при $y \to 0$. Введем новую переменную $y = g(x) = \arcsin x$

$\to 0$ при $x \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = \frac{x}{\arcsin x}.$$

в) Поскольку $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = 1$, то полагаем $f(y) = \frac{\operatorname{tg} y}{y} \to 1$ при $y \to 0$. Введем новую переменную $y = g(x) = \operatorname{arctg} x \to 0$ при $x \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = = -\frac{1}{2}$. **Следствие доказано.**

3.5. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение функций. О-символика. Эквивалентные функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* (*бесконечно малой*) при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = 0\right).$$

Бесконечно большие и бесконечно малые функции обладают свойствами, аналогичными свойствам бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. В частности, справедлива следующая

Теорема (о специальном представлении). *Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то в окрестности точки a справедливо представление $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$.*

Пусть $g(x) \neq 0$ при любом $x: \ 0 < |x-a| < \delta$ и существует предел $k = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, тогда

а) если $k = 0$, то пишут $f(x) = \mathrm{o}\,(g(x))$ при $x \to a$, если при этом $g(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, то $f(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем $g(x)$;

б) если $k = 1$, то пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ называют *эквивалентными* при $x \to a$, отметим, что эквивалентность обладает свойством транзитивности;

в) если k — конечно, но $k \neq 0$ и $k \neq 1$, то пишут $f(x) = \mathrm{O}\,(g(x))$ при $x \to a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ называют функциями *одного порядка* при $x \to a$;

г) если $k = \infty$ и $g(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, то $f(x)$ называют *бесконечно большой более высокого порядка*, чем $g(x)$.

Если функция $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{1} = 0$, то в соответствии с введенными обозначениями $f(x) = \mathrm{o}\,(1)$.

Пример 1. В соответствии с замечательными пределами (см. § 3.4) при $x \to 0$ имеет место следующий ряд эквивалентностей:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x,$$

$$\frac{2(1-\cos x)}{x^2} \sim 1.$$

Из тех же замечательных пределов получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x} = 0,$$

т. е. при $x \to 0$

$$\sin x - x = \mathrm{o}\,(x) \quad \text{или} \quad \sin x = x + \mathrm{o}\,(x).$$

Аналогично рассуждая, получим другие специальные представления:

$$\operatorname{tg} x = x + \mathrm{o}\,(x),$$
$$\ln(1+x) = x + \mathrm{o}\,(x),$$
$$\arcsin x = x + \mathrm{o}\,(x),$$
$$\operatorname{arctg} x = x + \mathrm{o}\,(x),$$
$$e^x = 1 + x + \mathrm{o}\,(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\,(x^2),$$

которые можно использовать при вычислении пределов.

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha(x+\mathrm{o}\,(x))} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \alpha x + \mathrm{o}\,(x) - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}(\alpha + \mathrm{o}\,(1)) = \alpha.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha\right) = 0$$

или

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x = \mathrm{o}\,(x),$$

а значит

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \mathrm{o}\,(x).$$

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\frac{x}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{x}{n}\right)\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{x+\mathrm{o}\,(x)} = e^x.$$

3.6. Понятие непрерывности функции в точке (на множестве). Простейшие свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва и их классификация

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad (\text{т. е. } a \in D(f)\,(!!!)).$$

Используя определения предела функции по Гейне и по Коши, можно сформулировать понятия непрерывности следующим образом.

Определение (*по Гейне*). Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любой числовой последовательности $x_n \to a$ соответствующая числовая последовательность $f(x_n) \to f(a)$.

Определение (*по Коши*). Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x:\ |x-a| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ или $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.

Перепишем предельное равенство из определения непрерывности функции в точке следующим образом:

$$\lim_{x-a\to 0}(f(x) - f(a)) = 0,$$

разность $\Delta x = x - a$ называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a)$ — *приращением функции*. В этих обозначениях предельное равенство переписывается так:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0,$$

а определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке a можно теперь сформулировать следующим образом (на языке приращений):

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример. Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим приращение функции в точке $x = 0$ $\Delta f = \Delta x \cdot \cos\frac{1}{\Delta x}$, Δf представляет собой произведение двух множителей, один из которых является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, а другой — ограниченная функция $\left|\cos\frac{1}{\Delta x}\right| \leq 1$, т. е. Δf есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, а значит функция непрерывна в точке $x = 0$.

Точки, в которых функция непрерывна, называются *точками непрерывности*. Естественно можно определить непрерывность функции в точке $x = a$ слева (справа) следующим образом:

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad \left(f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)\right).$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого множества, то функция называется *непрерывной на этом множестве*. В частности, если функция непрерывна в каждой точке интервала (a, b), непрерывна справа в точке a, непрерывна слева в точке b, то функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$.

Перечислим некоторые свойства непрерывных функций.

1. Непосредственно из теорем об арифметических свойствах предела функции получаем теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух функций. Из теоремы о пределе сложной функции вытекает утверждение о непрерывности сложной функции.

2. *Локальная ограниченность непрерывной функции.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $a \in D(f)$, то существует δ-окрестность точки a, в которой функция $y = f(x)$ ограничена. Чтобы в этом убедиться, достаточно расписать определение непрерывности по Коши, тогда числа $f(a) - \varepsilon$ и $f(a) + \varepsilon$ будут ограничивать функцию $y = f(x)$ снизу и сверху в δ-окрестности точки a.

3. *Сохранение знака.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то существует δ-окрестность точки a, в которой функция $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$). Для проверки этого свойства достаточно выбрать $0 < \varepsilon < f(a)$, затем расписать определение непрерывности по Коши в точке, тогда число $f(a) - \varepsilon > 0$ ограничивает $f(x)$ снизу в δ-окрестности точки a, и значит $f(x) > 0$. Если $f(a) < 0$, то выбираем $0 < \varepsilon < -f(a)$ и расписываем определение непрерывности, тогда $f(a) + \varepsilon < 0$ ограничивает $f(x)$ сверху, т. е. $f(x) < 0$.

4. *Непрерывность абсолютной величины.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, то функция $y = |f(x)|$ непрерывна в точке a. Доказательство следует из цепочки неравенств

$$0 < |\Delta|f|| = ||f(x)| - |f(a)|| \le |f(x) - f(a)| = |\Delta f|.$$

Если теперь $x \to a$, т. е. $\Delta x = x - a \to 0$, то $|\Delta f| \to 0$, а значит $\Delta|f| \to 0$, что и означает непрерывность в точке a функции $y = |f(x)|$, записанной на языке приращений.

5. *Непрерывность обратной функции.* Если функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на этом отрезке, тогда существует обратная функция $x = g(y)$, строго возрастающая (убывающая) и непрерывная на отрезке $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$.

6. Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

а) Многочлены $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Функция $y = f(x) = x$ непрерывна в любой точке x_0, так как

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x.$$

Если теперь $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Тогда по теореме о непрерывности произведения получаем непрерывность любой степени x^k, далее по теореме о непрерывности суммы получаем непрерывность любого многочлена $P(x)$.

б) Рациональные функции $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывны как частное двух непрерывных функций.

в) Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. При $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right) = a^{x_0}\left(e^{\Delta x \ln a} - 1\right) =$$

$$= a^{x_0}\left(1 + \ln a \cdot \Delta x + \mathrm{o}\left(\Delta x\right) - 1\right) = a^{x_0}\left(\ln a + \mathrm{o}\left(1\right)\right)\Delta x \to 0,$$

т. е. любая показательная функция непрерывна в любой точке x_0.

г) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ непрерывна как функция, обратная к непрерывной $y = a^x$.

д) Степенная функция $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ непрерывна как композиция непрерывных функций.

е) Все тригонометрические функции непрерывны. Действительно, для функции $y = \sin x$ имеем неравенство

$$|\Delta y| = |\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0| = \left|2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 = \Delta x.$$

Отсюда при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т. е. $y = \sin x$ — непрерывная функция. Точно также проверяется непрерывность функции $y = \cos x$. Соответственно функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны как частное непрерывных функций.

ж) Все обратные тригонометрические функции непрерывны как обратные к непрерывным функциям.

Пример (уравнение Кеплера). Существует единственная непрерывная функция $x = x(y)$, $y \in R$, удовлетворяющая уравнению Кеплера

$$x - \varepsilon \sin x = y, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В § 2.6 было показано, что $\forall y$ существует единственное x, удовлетворяющее уравнению Кеплера. Этим было доказано существование функции $x = x(y)$. Докажем ее непрерывность. Рассмотрим функцию

$$y = x - \varepsilon \sin x : R \to R.$$

Эта функция непрерывна. Покажем ее монотонное возрастание, пусть $x_1 > x_2$, тогда

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) - \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_2) =$$

$$= (x_1 - x_2) - 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Так как

$$\left| 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq 2\varepsilon \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \varepsilon \cdot (x_1 - x_2),$$

то

$$-\varepsilon \cdot (x_1 - x_2) \leq 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \varepsilon \cdot (x_1 - x_2),$$

$$\varepsilon \cdot (x_1 - x_2) \geq -2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \geq -\varepsilon \cdot (x_1 - x_2),$$

поэтому

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) - \varepsilon \cdot (x_1 - x_2) = (1 - \varepsilon)(x_1 - x_2) > 0$$

или $y_1 > y_2$. Отсюда по теореме о непрерывности обратной функции $x = x(y)$ непрерывна.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва функции*, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Пусть $x = a$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, рассмотрим величины:

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x), \quad f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Если $f(a-0) = f(a+0)$ — конечно, то $x = a$ называется *устранимой точкой* разрыва.

Если $f(a-0) \neq f(a+0)$ и эти величины конечны, то $x = a$ называется *точкой разрыва первого рода*, величину $f(a+0) - f(a-0)$ называют скачком функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.

Если хотя бы одна из величин $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует, то $x = a$ называется *точкой разрыва второго рода*.

Пример 1. Функция Дирихле $D(x)$ в каждой точке своей области определения имеет разрыв второго рода (см. § 3.1). Функция $y = x \cdot D(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и имеет разрывы второго рода во всех остальных точках области определения.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \text{ — любое нецелое число;} \\ 0, & x \in Z \end{cases}$$

в точках $x \in Z \setminus \{0\}$ имеет устранимые разрывы и непрерывна во всех остальных точках своей области определения.

Пример 3. Функции $y = e^{\frac{1}{x}}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \sin\dfrac{1}{x}$ имеют в точке $x = 0$ разрыв второго рода. Функции $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$, $y = \operatorname{sign} x$ имеют в точке $x = 0$ разрыв первого рода. Функции

$$y = \begin{cases} x-2, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеют в точке $x = 0$ устранимый разрыв.

Теорема (о точках разрыва монотонной на отрезке функции). *Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a, b]$, то она может иметь на этом отрезке разрывы только первого рода.*

Доказательство. Проведем для случая неубывающей на $[a, b]$ функции $y = f(x)$ (т. е. $\forall x'$, $x'' \in [a, b]$ таких, что $x' < x''$ выполняется неравенство $f(x') \leq f(x'')$). Пусть $x_0 \in [a, b]$ — произвольная точка, введем величины:

$$l_1 = \inf_{x_0 < x \leq b} f(x), \quad l_2 = \sup_{a \leq x < x_0} f(x).$$

Покажем, что

$$l_1 = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0), \quad l_2 = \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Так как $l_1 = \inf\limits_{x_0 < x \leq b} f(x)$, то в соответствии с определением нижней грани числового множества (см. § 1.5) имеем:

а) $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) \geq l_1$;

б) $\forall \varepsilon > 0$ существует $x_1 > x_0$ такое, что $f(x_1) < l_1 + \varepsilon$.

Поскольку $y = f(x)$ — неубывающая функция на $[a, b]$, то $\forall x$ таких, что $x_0 < x \leq x_1$, выполняются неравенства $l_1 \leq f(x) \leq f(x_1) < l_1 + \varepsilon$ и $f(x_0) \leq f(x)$, т. е. $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$ и в силу монотонности предела $f(x_0) \leq l_1$. Аналогично доказывается неравенство $l_2 \leq f(x_0)$. Отсюда следует, что величина $l_1 - l_2 \geq 0$ конечна, т. е. x_0 может быть только точкой разрыва первого рода или устранимой. **Теорема доказана.**

Теорема (критерий непрерывности монотонной функции). *Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a, b]$, тогда для непрерывности $y = f(x)$ на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $l \in [f(a), f(b)]$ (или $[f(b), f(a)]$) нашлась точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) = l$.*

3.7. Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса и Больцано – Коши)

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ ($f(x) \in C[a, b]$), то $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и достигает на $[a, b]$ свои верхнюю и нижнюю грани.*

Доказательство. Пусть $R(f) \equiv \{f(x) : x \in [a, b]\}$ — множество значений функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, обозначим через $M = \sup R(f) = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$ верхнюю грань множества $R(f)$, тогда в силу определения верхней грани числового множества (см. § 1.5) существует последовательность $a_n \to M$, $a_n \in R(f)$, а значит, существует последовательность $x_n \in [a, b]$ таких, что $a_n = f(x_n)$. Поскольку все числа $x_n \in [a, b]$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена и в соответствии с теоремой Больцано – Вейерштрасса (см. § 2.5) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$. По теореме о монотонности предела числовой последовательности (см. § 2.2) $x_0 \in [a, b]$, поэтому согласно определению непрерывности функции в точке (по Гейне)

$$f(x_0) = \lim_{x_{n_k} \to x_0} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k \to \infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \infty} a_n = M.$$

Итак, $f(x)$ достигает свою верхнюю грань M в точке x_0, а значит, $M = \sup f(x)$ — конечная величина и соответственно $f(x)$ ограничена сверху на $[a, b]$. Проводя аналогичные рассуждения для нижней грани $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, получим ограниченность снизу. **Теорема доказана.**

Теорема Больцано – Коши. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ ($f(x) \in C[a, b]$) и $f(a) \ne f(b)$, то $\forall\, C$, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = C$.*

Доказательство. Пусть $A = f(a)$, $B = f(b)$ и $A < C < B$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой x_0, либо $f(x_0) = C$, и тогда $\xi = x_0$, либо $f(x_0) \neq C$, тогда на концах одного из новых отрезков функция $f(x)$ принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$, $f(a_1) < C < f(b_1)$. Вновь разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой x_1 и т. д. В результате построим систему вложенных отрезков $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, по длине стремящейся к нулю, причем $f(a_n) < C < f(b_n)$. Пусть $\xi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$ и в силу непрерывности функции $f(x)$ справедливы равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq C \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$, т. е. $C = f(\xi)$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков (т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = 0$.*

Пример. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Действительно, пусть

$$m = \min(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)),$$
$$M = \max(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)),$$

тогда

$$f(x_i) = m = \frac{n \cdot m}{n} \leq C = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq$$
$$\leq \frac{n \cdot M}{n} = M = f(x_j),$$

по теореме Больцано–Коши на отрезке с концами x_i и x_j найдется точка ξ такая, что $C = f(\xi)$.

3.8. Понятие равномерной непрерывности функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве A, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x', x'' \in A$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Очевидно, если функция равномерно непрерывна, то она и просто непрерывна на множестве A, обратное, вообще говоря, не верно, но справедлива следующая

Теорема Г. Кантора. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (т. е. $f(x) \in C[a, b]$), то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство (от противного). Пусть $f(x) \in C[a, b]$, но $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a, b]$, т. е. $\exists\varepsilon_0 > 0$, что $\forall\delta > 0$ найдутся $x', x'' \in [a, b]$ такие, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \dfrac{1}{n} > 0$, тогда для $\varepsilon_0 > 0$ найдутся пары x'_n, $x''_n \in [a, b]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta_n$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$. Числовая последовательность $\{x'_n\}$ ограничена ($a \leq x'_n \leq b$), тогда по теореме Больцано–Вейерштрасса (см. §2.5) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x'_{n_k} \to \xi$, причем $\xi \in [a, b]$. Соответствующая подпоследовательность $\{x''_{n_k}\}$ также сходится к ξ, что следует из неравенства

$$|x''_{n_k} - \xi| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - \xi| \leq \frac{1}{n_k} + |x'_{n_k} - \xi|.$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по определению непрерывности функции (по Гейне) $f(x'_{n_k}) \to f(\xi)$ и $f(x''_{n_k}) \to f(\xi)$, т. е. $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \to 0$, а значит для $\varepsilon_0 > 0$ $\exists N_{\varepsilon_0}$ такой, что $\forall n_k > N_{\varepsilon_0}$ выполняется неравенство $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon_0$, но это противоречит вышеполученному неравенству. **Теорема доказана.**

Пример 1. Функции $y = \cos\frac{1}{x}$ и $y = \sin\frac{1}{x}$ равномерно непрерывны на любом отрезке $[\delta, 1]$ при $\delta > 0$ и не являются равномерно непрерывными на $(0, 1]$. Действительно, для функции $y = \cos\frac{1}{x}$ рассмотрим две последовательности значений аргумента $x_n = \dfrac{1}{\pi + 2\pi n}$, $y_m = \dfrac{1}{2\pi m}$, $x_n \to 0$ и $y_m \to 0$, поэтому $\forall\delta > 0$ при достаточно больших m и n выполняется неравенство $|x_n - y_m| < \delta$, но

$$\cos\frac{1}{y_m} - \cos\frac{1}{x_n} = 1 - (-1) = 2 = \varepsilon_0 > 0.$$

Пример 2. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на R, хотя по теореме Кантора является таковой на любом отрезке $[a, b]$. Действительно, рассмотрим последовательности $x_n = n + \frac{1}{n}$ и $y_n = n$. Очевидно $y_n \to \infty$, $x_n \to \infty$ и $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, поэтому $\forall\delta > 0$ при достаточно больших n выполняется неравенство $x_n - y_n = \frac{1}{n} < \delta$, но

$$x_n^2 - y_n^2 = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 = \varepsilon_0 > 0.$$

Пример 3. Функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на луче $x > 1$. Действительно,

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} < \frac{|x' - x''|}{2},$$

отсюда $\forall\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x' > 1$, $x'' > 1$ из неравенства $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ следует $\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| < \varepsilon$.

3.9. Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Функции, непрерывные на компакте

Точка x_0 называется *предельной* для множества $A \subset R$, если во всякой окрестности точки x_0 содержится бесконечно много точек множества A, при этом сама точка x_0 может как принадлежать множеству A, так и не принадлежать ему.

Определение. Множество $A \subset R$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Множество $A \subset R$ называется *открытым*, если каждая его точка содержится в A вместе с некоторой своей δ-окрестностью. В этом случае точку называют *внутренней точкой* множества A, соответственно открытое множество состоит только из внутренних точек.

Пример. Множества $[a, b]$, $[a, +\infty)$ замкнутые, а множества (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ — открытые, полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$ не являются ни замкнутыми, ни открытыми множествами.

Теорема 1. а) *Если A — замкнутое множество, то $A_1 = R \setminus A$ — открытое.*

б) *Если A — открытое множество, то $A_1 = R \setminus A$ — замкнутое.*

Доказательство (от противного). а) Пусть $A_1 = R \setminus A$ не является открытым множеством, т. е. какая-то из его точек $x_0 \in A_1$ не является внутренней. Это значит, что во всякой δ-окрестности точки x_0 есть хотя бы одна точка из A (отличная от x_0), а следовательно, таких точек бесконечно много. Это, в свою очередь, означает, что x_0 — предельная точка для A и в силу замкнутости A $x_0 \in A$, но $x_0 \in A_1 = R \setminus A$. Полученное противоречие означает открытость множества A_1.

б) Пусть множество $A_1 = R \setminus A$ не содержит хотя бы одну из своих предельных точек x_0, тогда $x_0 \in A$. Но все точки множества A внутренние, поэтому существует δ-окрестность точки x_0, целиком состоящая из точек множества A, т. е. там нет точек множества $A_1 = R \setminus A$, но это противоречит предельности точки x_0, поэтому $x_0 \in A_1$, и значит множество A_1 замкнуто. **Теорема 1 доказана.**

Теорема 2. а) *Любое объединение открытых множеств открыто, конечное пересечение открытых множеств открыто.*

б) *Любое пересечение замкнутых множеств замкнуто, конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. а) Пусть $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, A_α — открытые множества, тогда существует индекс α_0 такой, что $x_0 \in A_{\alpha_0}$. В силу открытости множества A_{α_0} существует δ-окрестность точки x_0, целиком лежащая в A_{α_0}, тогда эта окрестность целиком входит в объединение $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, т. е. всякая точка $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ внутренняя, а значит объединение $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ — открытое множество.

Пусть теперь $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$, A_α — открытые множества, тогда существуют δ_α-окрестности точки x_0, целиком лежащие в A_α, т. е. $(x_0 - \delta_\alpha, x_0 + \delta_\alpha) \subset A_\alpha$. Пусть $\delta = \min\limits_{\alpha=1,\ldots,n} \delta_\alpha$, тогда δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ целиком входит в пересечение, т. е. всякая точка $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ внутренняя, а значит множество $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ — открытое.

б) Пусть A_α — замкнутые множества, тогда $R \setminus A_\alpha$ — открытые. Следовательно, $\bigcup\limits_{\alpha}(R \setminus A_\alpha)$ — открытое множество, а значит $R \setminus \bigcup\limits_{\alpha}(R \setminus A_\alpha)$ замкнуто, но в силу законов двойственности де Моргана (см. § 1.2) $R \setminus \bigcup_\alpha (R \setminus A_\alpha) = \bigcap_\alpha (R \setminus (R \setminus A_\alpha)) = \bigcap_\alpha A_\alpha$.

Аналогично проверяется другое утверждение этой части теоремы. **Теорема 2 доказана.**

Пример. Множество

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)}_{\text{открытые множества}} \equiv [-1, 1]$$

замкнуто. Множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\text{замкнутые множества}} \equiv (-1, 1)$$

открыто.

Определение. Замкнутое и ограниченное множество $A \subset R$ называется *компактным.*

Определение. Пусть заданы множество $A \subset R$ и система множеств $\{B_\alpha\}$. Говорят, что $\{B_\alpha\}$ является *покрытием* A, если $\forall x \in A \;\; \exists B_{\alpha'} \in \{B_\alpha\}$ такое, что $x \in B_{\alpha'}$.

Следующее утверждение обычно принимают за определение компакта.

Лемма Бореля. *Из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство (от противного). Пусть A — компактное множество (т. е. замкнуто и ограничено), тогда существует отрезок $A \subset [a, b]$, но из некоторого открытого покрытия $\{B_\alpha\}$ множества A нельзя выделить конечное подпокрытие. Пусть точка x_0 делит $[a, b]$ пополам, обозначим через $[a_1, b_1]$ ту из его половин, в которой множество $A \cap [a_1, b_1]$ не допускает выделения конечного подпокрытия из $\{B_\alpha\}$. Пусть точка x_1 делит $[a_1, b_1]$ пополам, обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из его частей, в которой множество $A \cap [a_2, b_2]$ не допускает выделения конечного подпокрытия из $\{B_\alpha\}$, и т. д. Построим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, по длине стремящейся к нулю (так как $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$), тогда в силу принципа вложенных отрезков (см. § 1.5) существует единственная точка $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Эта точка x_0 является предельной для множества A, так как, во-первых, по построению всякое множество $A \cap [a_n, b_n]$ содержит бесконечное количество элементов множества A, а, во-вторых, $\forall \delta > 0$ δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 содержит в себе целиком все отрезки $[a_n, b_n]$ с номерами n такими, что $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} < \delta$. В силу замкнутости множества $x_0 \in A$. Но всякая точка множества A покрыта некоторым открытым множеством из $\{B_\alpha\}$, поэтому существует $B_{\alpha'}$ такое, что $x_0 \in B_{\alpha'}$. Однако в силу открытости $B_{\alpha'}$ существует δ-окрестность точки x_0 такая, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset B_{\alpha'}$. Но это означает, что $B_{\alpha'}$ покрывает все отрезки $[a_n, b_n]$ длины $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} < \delta$, а значит и множества $A \cap [a_n, b_n]$, т. е. у множеств $A \cap [a_n, b_n]$ существует конечное подпокрытие. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. **Лемма Бореля доказана.**

Теорема Кантора (обобщенная). *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. В силу непрерывности функции для любого $\varepsilon > 0$ для каждой точки x компакта существует δ_x-окрестность такая, что $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $|x - x'| < \delta_x$. Накроем каждую точку x компакта своей $\dfrac{\delta_x}{2}$-окрестностью. Эти $\dfrac{\delta_x}{2}$-окрестности составляют открытое покрытие компакта, и в силу леммы Бореля из нее можно выделить конечное подпокрытие из $\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}$-окрестностей. Пусть $\delta_\varepsilon = \min\left(\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$, если x' и x'' — две произвольные точки компакта такие, что $|x''-x'| < \delta_\varepsilon$, то x' принадлежит одной из выделенных $\frac{\delta_{x_i}}{2}$-окрестностей, поэтому

$$|x''-x_i| \leq |x''-x'| + |x'-x_i| < \delta_\varepsilon + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i},$$

но тогда $|f(x'') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$, отсюда получаем

$$|f(x')-f(x'')| \leq |f(x')-f(x_i)| + |f(x_i)-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает равномерную непрерывность функции на компакте. **Обобщенная теорема Кантора доказана.**

4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1. Понятия дифференцируемости функции в точке, производной, дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой ее окрестности и пусть величина Δx такова, что $x + \Delta x$ также принадлежит области определения функции $y = f(x)$, тогда имеет смысл разность (приращение функции в точке x)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения (разностного) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует.

Для этого предела принято использовать следующие обозначения: $f'(x)$ введено Лагранжем, $\dfrac{df}{dt}$ введено Лейбницем, $D_x f$ введено Коши.

Замечание 1. Если $\Delta x \to 0+$ или $\Delta x \to 0-$, то в пределе получим правую и левую производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$. Очевидно, если существует $f'(x)$ (двусторонняя производная), то существуют и односторонние $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$, причем $f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$. Обратно, если существуют односторонние производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$, и они равны между собой, то существует двусторонняя производная, равная общему значению односторонних. Если существуют односторонние производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$, причем $f'(x+0) \neq f'(x-0)$, то не существует $f'(x)$. Например, для функции $f(x) = |x|$ $f'(0+0) = 1$ и $f'(0-0) = -1$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если (полное) приращение Δy этой функции в точке x, отвечающее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx (но зависящее, вообще говоря, от x), $\alpha(\Delta x)$ — функция от Δx, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Второе слагаемое в определении дифференцируемости функции в точке x можно переписать (см. § 3.5) в виде $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$, т. е. полное приращение Δy можно представить следующим образом:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Теорема. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала ее производная $f'(x)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, тогда в этой точке полное приращение Δy представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A конечно и не зависит от Δx, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

отсюда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, но левая часть этого равенства представляет собой $f'(x)$, т. е. производная функции $f(x)$ существует, конечна и $f'(x) = A$.

Достаточность. Пусть существует (конечная) производная $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, тогда для разностного отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ справедливо специальное представление (см. § 3.5)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

а значит, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, при этом $f'(x) = A$. **Теорема доказана.**

Таким образом, для функции одной переменной (и только для нее!) дифференцируемость в точке эквивалентна существованию в этой точке (конечной) производной $f'(x)$.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

отсюда следует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что в соответствии с определением непрерывности на языке приращений (см. § 3.6) и означает требуемое. **Теорема доказана.**

Замечание 2. Обратное утверждение неверно, что иллюстрирует пример функции $y = |x|$, *непрерывной в точке ноль и не дифференцируемой в этой точке.* Таким образом, непрерывность — необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости.

Замечание 3. Выражение для полного приращения Δy в определении дифференцируемости функции представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых $A \cdot \Delta x$, линейное относительно Δx, называется *главной частью* полного приращения Δy дифференцируемой функции или *дифференциалом функции*, для нее существует специальное обозначение

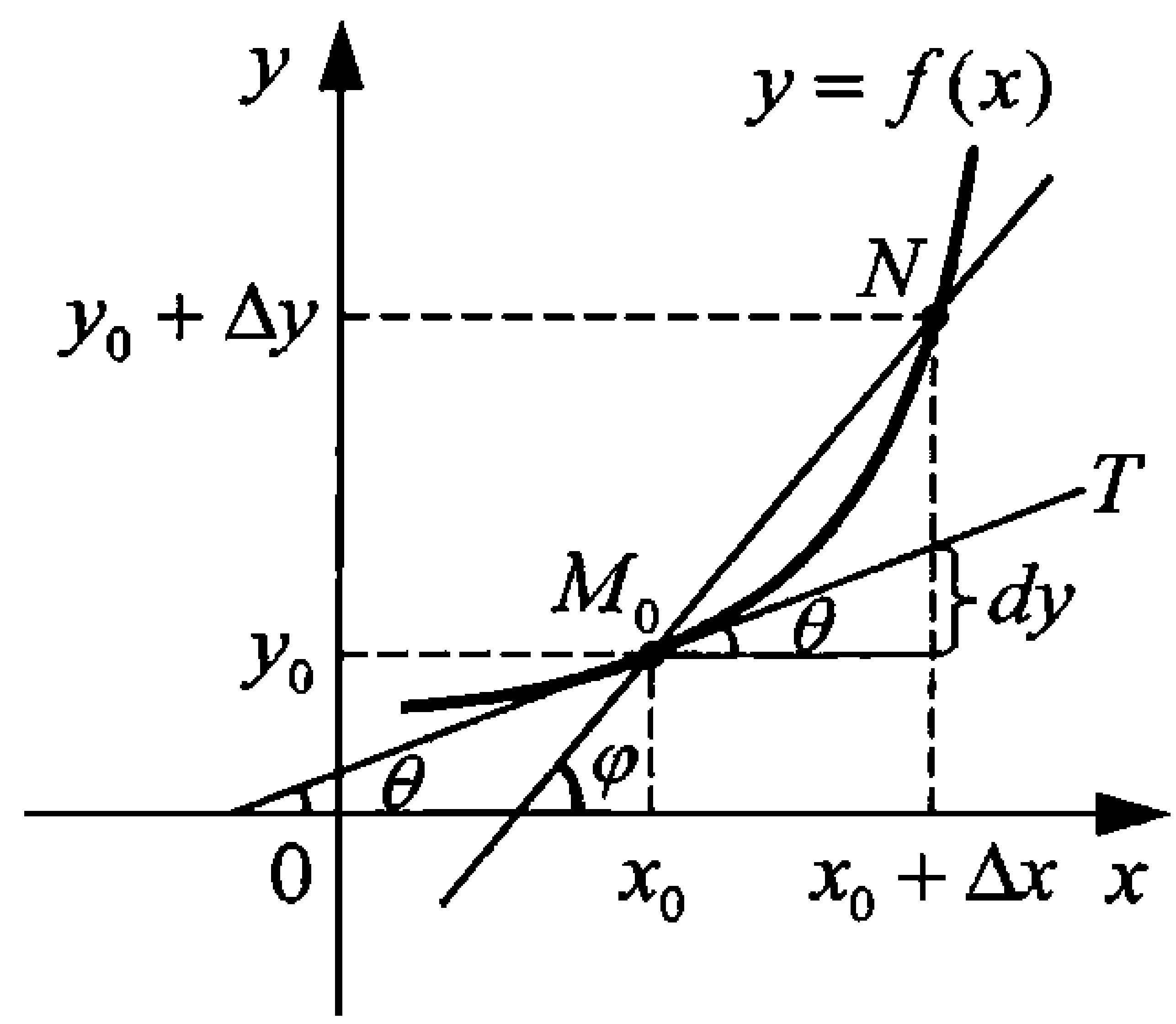
$$dy = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Очевидно, в общем случае (для зависимой переменной) $dy \neq \Delta y$, но если $y = x$, то $\Delta x = \Delta y = dy = dx$, таким образом, для независимой переменной $\Delta x = dx$, откуда и получаем общепринятую форму записи дифференциала функции $dy = f'(x)\,dx$.

4.2. Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Механический смысл производной

Построим график некоторой функции $y = f(x)$, M_0 — точка графика, M_0N — секущая графика.

Устремим точку N к M_0 вдоль графика функции (в предположении непрерывности функции $y = f(x)$). По мере приближения N к M_0 секущая M_0N стремится к некоторому предельному положению M_0T, это предельное



положение секущей при стремлении N к M_0 вдоль графика $y = f(x)$ называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0. Пусть $M_0(x_0, y_0)$, φ — угол наклона секущей M_0N к положительному направлению оси Ox, $N(x_0 + \Delta x, y + \Delta y)$, $|BN| = \Delta y$, $|M_0B| = \Delta x$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, отсюда получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta,$$

где θ — угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox. Поскольку предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует, является производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, то

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\theta = k_{\text{кас}}.$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной в точке касания x_0. В этом и состоит *геометрический смысл производной.*

Поскольку

$$dy = f'(x_0)dx = \Delta x \operatorname{tg}\theta,$$

то dy — приращение ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx. В этом и состоит *геометрический смысл дифференциала.*

Уравнение касательной в точке M_0 будем искать в виде

$$y = kx + b.$$

Так как касательная проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению касательной

$$y_0 = kx_0 + b,$$

тогда $b = y_0 - kx_0 = f(x_0) - kx_0$ и, следовательно,

$$y = kx + b = k(x - x_0) + f(x_0).$$

Поскольку $k = f'(x_0)$, то отсюда получаем окончательный вид уравнения касательной

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

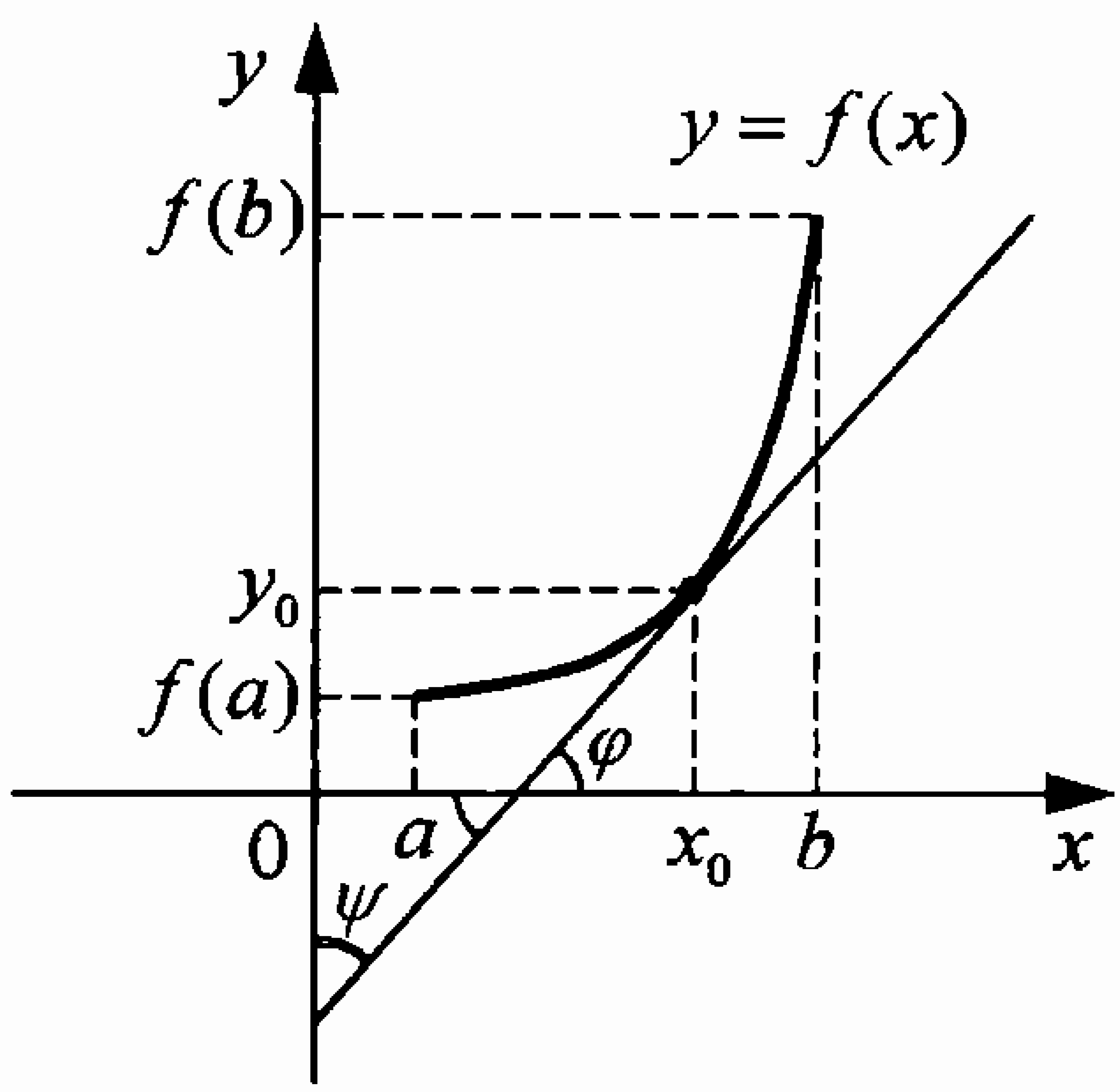
Замечание. Если функция $s = s(t)$ описывает путь, пройденный точкой за время t, то разность $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ есть путь, пройденный за время от t_0 до $(t_0 + \Delta t)$, тогда разностное отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость точки за время $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Следовательно, предельное значение $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ — мгновенная скорость точки в момент времени t_0. В этом состоит *механический смысл производной.*

4.3. Дифференцирование сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала

Теорема (дифференцирование сложной функции). *Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, причем $x_0 = \varphi(t_0)$, функция $y = f(x)$ дифференцируема* *в точке x_0, тогда сложная функция $y = g(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем*

$$g'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0).$$

Теорема (дифференцирование обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$, тогда она имеет на отрезке $[f(a); f(b)]$ ($[f(b); f(a)]$) обратную функцию $x = g(y)$.*



Пусть $x_0 \in (a; b)$ — внутренняя точка отрезка $[a; b]$, $y_0 = f(x_0)$ — внутренняя точка отрезка $[f(a); f(b)]$ ($[f(b); f(a)]$). Если $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = g(y)$ имеет в точке y_0 производную $g'(y_0)$, причем

$$g'(y_0) = \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример. Функция $x = x(y)$, являющаяся решением уравнения Кеплера $x - \varepsilon \cdot \sin x = y$, $0 < \varepsilon < 1$, дифференцируема, и в силу теоремы о дифференцируемости обратной функции

$$x'(y) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cdot \cos x(y)}.$$

Теорема (об инвариантности формы первого дифференциала). *Если вместо дифференциала независимой переменной x в формулу для дифференциала dy функции $y = f(x)$ подставить дифференциал некоторой функции $x = \varphi(t)$, то получим равенство вида*

$$dy = df(x)\Big|_{x=\varphi(t)} = f'(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

которое является дифференциалом сложной функции

$$df(\varphi(t)) = (f(\varphi(t)))'_t\,dt.$$

4.4. Правила дифференцирования

Теорема. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то $\forall c \in R$ справедливы следующие равенства:*

1) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$;

2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

Доказательство. 1) Так как

$$\frac{\Delta(cf(x))}{\Delta x} = \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x))}{\Delta x} = c\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

тогда если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, то существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(cf(x))}{\Delta x}$.

2) Поскольку

$$\frac{\Delta(f(x) \pm g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta f(x) \pm \Delta g(x)}{\Delta x},$$

тогда если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f(x) \pm g(x))}{\Delta x}$.

3) Составим разностное отношение

$$\frac{\Delta(f(x) \cdot g(x))}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x+\Delta x) + f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= g(x+\Delta x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Так как $g(x)$ дифференцируема в точке x, то $g(x)$ непрерывна в точке x (см. §4.1), т.е. $g(x+\Delta x) \to g(x)$ при $\Delta x \to 0$, поэтому если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f(x) \cdot g(x))}{\Delta x}$.

4) Имеем

$$\frac{\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\times$$
$$\times\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\xrightarrow{\Delta x\to 0}$$
$$\xrightarrow{\Delta x\to 0}\frac{1}{g^2(x)}\big(f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)\big).$$

Следствие 1. *Обобщением правила 2 является следующая формула дифференцирования произведения:*

$$(f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x))' = \sum_{k=1}^{n} f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_k'(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x).$$

Следствие 2. *Правила нахождения дифференциалов:*

1) $d(f\pm g) = df \pm dg$;

2) $d(f\cdot g) = df\cdot g + f\cdot dg$;

3) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{df\cdot g - f\cdot dg}{g^2}$.

4.5. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница

Если функция $y = f(x)$ имеет производную на некотором множестве A, то на этом же множестве определена функция $y' = f'(x)$. В случае, когда эта последняя функция сама имеет производную, тогда такая производная называется второй производной функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$. Аналогично, если уже найдена n-я производная $f^{(n)}(x)$, то $(n+1)$-я производная может быть найдена по правилу $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$. Функции, имеющие на множестве A n производных, называются n раз дифференцируемыми на этом множестве. Если при этом функция и все ее производные до n-го порядка включительно непрерывны на множестве A, то говорят, что функция принадлежит классу $C^n(A)$ (если $A = [a;b]$, то пишут $C^n[a;b]$).

Для вычисления n-й производной от произведения двух функций полезно использовать следующую формулу Лейбница.

Теорема (формула Лейбница).

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} \cdot v^{(i)} =$$

$$= u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)} \cdot v^{(2)} + C_n^3 u^{(n-3)} \cdot v^{(3)} + \ldots + u \cdot v^{(n)}.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = C_1^0 u' \cdot v + C_1^1 u \cdot v',$$

формула Лейбница справедлива.

Пусть формула справедлива при $n = k$, тогда при $n = k+1$, с учетом свойства биномиальных коэффициентов $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (см. § 1.3), имеем

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = \left((u \cdot v)^{(k)}\right)' = u^{(k+1)} \cdot v + \left(C_k^0 + C_k^1\right) \cdot u^{(k)} \cdot v' +$$

$$+ \left(C_k^1 + C_k^2\right) \cdot u^{(k-1)} \cdot v'' + \left(C_k^2 + C_k^3\right) \cdot u^{(k-2)} \cdot v''' + \ldots + u \cdot v^{(k+1)} =$$

$$= C_{k+1}^0 u^{(k+1)} \cdot v + C_{k+1}^1 u^{(k)} \cdot v' + C_{k+1}^2 u^{(k-1)} \cdot v'' + C_{k+1}^3 u^{(k-2)} \cdot v''' +$$

$$+ \ldots + C_{k+1}^{k+1} u \cdot v^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i u^{(k+1-i)} \cdot v^{(i)}.$$

Теорема доказана.

В § 4.1 была получена формула для первого дифференциала функции $dy = f'(x)\,dx$, где dx — дифференциал независимой переменной, $dx = \Delta x$. Дифференциал dy сам является функцией от x, поэтому можно поставить задачу о нахождении дифференциала $d(dy)$, который называется вторым дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y. Вычислим его:

$$d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2 + f'(x)(dx)'dx.$$

Поскольку x — независимая переменная, то $dx = \Delta x$ — приращение аргумента, не зависящее от x, поэтому $(dx)' = 0$, а значит $d^2y = f''(x)\,dx^2$. Далее индукцией по n можно получить формулу

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

если x — независимая переменная.

Если x является функцией некоторой третьей переменной t, т. е. $x = \varphi(t)$, тогда

$$dy = df(x)\Big|_{x=\varphi(t)} = f'(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = f'_\varphi(\varphi(t))\cdot d\varphi(t) =$$
$$= f'_\varphi(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$
$$d^2y = (f'_\varphi(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt)'\,dt =$$
$$= (f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t))\cdot(\varphi'(t))^2 + f'_\varphi(\varphi(t))\cdot\varphi''(t))\,dt^2 =$$
$$= f''_{xx}\,dx^2 + f'_x\,d^2x \neq f''_{xx}\,dx^2.$$

Таким образом, свойство инвариантности для второго дифференциала (равно как и для всех последующих) уже не имеет места.

4.6. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях)

Теорема М. Ролля. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на $[a;b]$. Возможны два случая.

1. $M = m$, тогда функция $y = f(x)$ постоянна на $[a;b]$, а производная постоянной равна нулю, т. е. $f'(x) = 0$ при всех $x \in [a;b]$.

2. $M \neq m$. Пусть для определенности $f(a) \neq M$, тогда в соответствии с теоремой Вейерштрасса (см. § 3.7) существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = M$. Рассмотрим некоторое приращение Δx такое, чтобы $c + \Delta x \in [a;b]$, тогда $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$. Следовательно, при $\Delta x > 0$ отношение $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ (неположительно), при $\Delta x < 0$ отношение $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ (неотрицательно). Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в этих отношениях, получим по следствию из теоремы о монотонности предела функции (см. § 3.2) $f'(c-0) \geq 0$ при $\Delta x < 0$ (левая производная) и $f'(c+0) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ (правая производная). Существование этих пределов следует из дифференцируемости функции $y = f(x)$ во всех внутренних точках интервала $(a;b)$. Из дифференцируемости функции в точке c следует равенство производных $f'(c) = f'(c-0) = f'(c+0)$ (см. § 4.1), откуда и получаем, что $f'(c) = 0$. **Теорема М. Ролля доказана.**

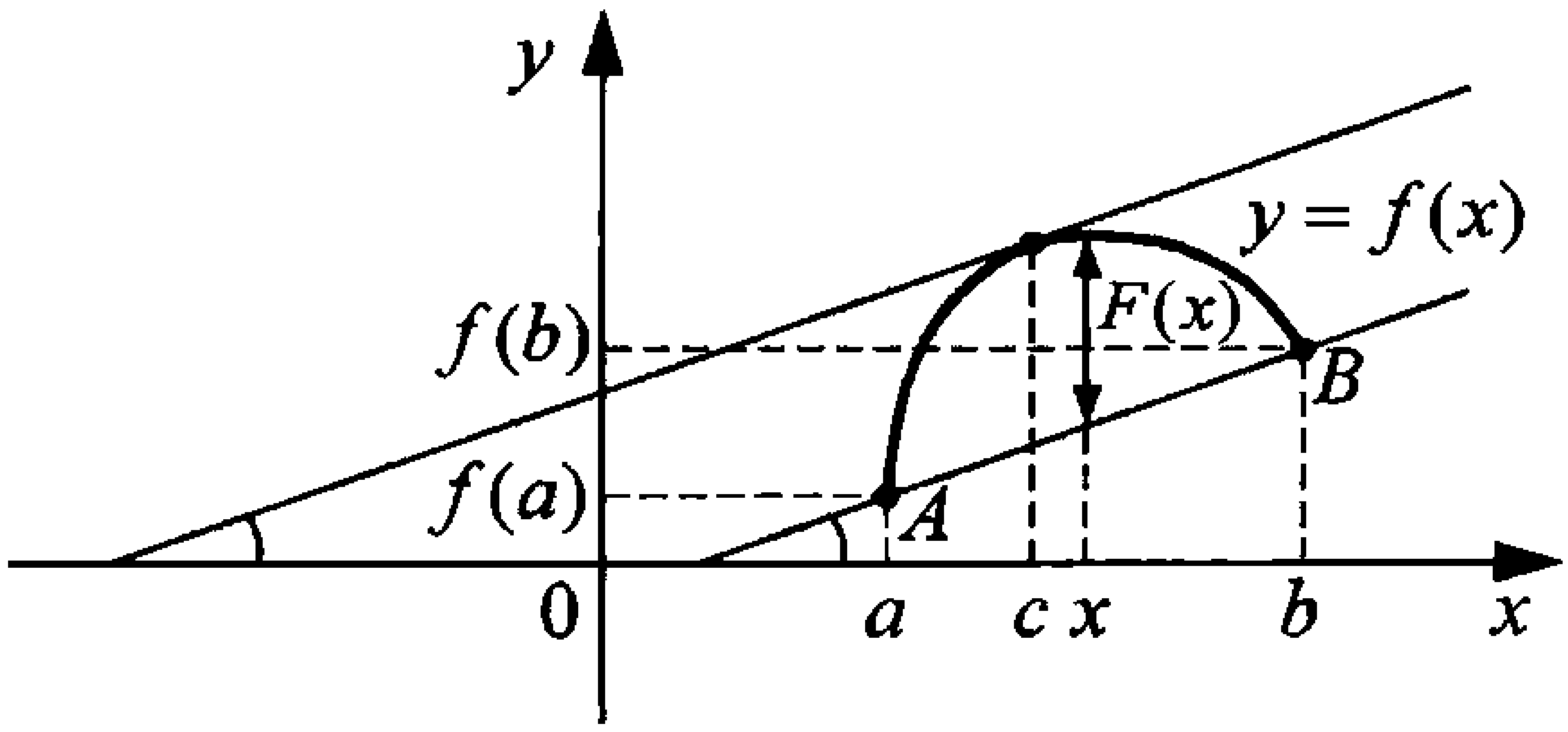
Геометрический смысл теоремы М. Ролля состоит в том, что для любой функции, непрерывной на отрезке $[a;b]$, принимающей на его концах равные значения и дифференцируемой на $(a;b)$, найдется такая точка на графике функции $y = f(x)$ (вообще говоря, не одна), касательная к которому в этой точке параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

(*формула Лагранжа конечных приращений*).

Доказательство. Рассмотрим две точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$, лежащие на графике функции $y = f(x)$. Соста-



вим уравнение прямой, проходящей через эти точки, исходя из общего уравнения прямой $y = k \cdot x + l$. Подберем значения параметров k и l так, чтобы координаты точек A и B удовлетворяли уравнению прямой

$$\begin{cases} f(a) = k \cdot a + l; \\ f(b) = k \cdot b + l. \end{cases}$$

Решив эту систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными относительно k и l, получим

$$\begin{cases} l = \dfrac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}; \\ k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}, \end{cases}$$

т. е.

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

есть искомое уравнение прямой.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\right).$$

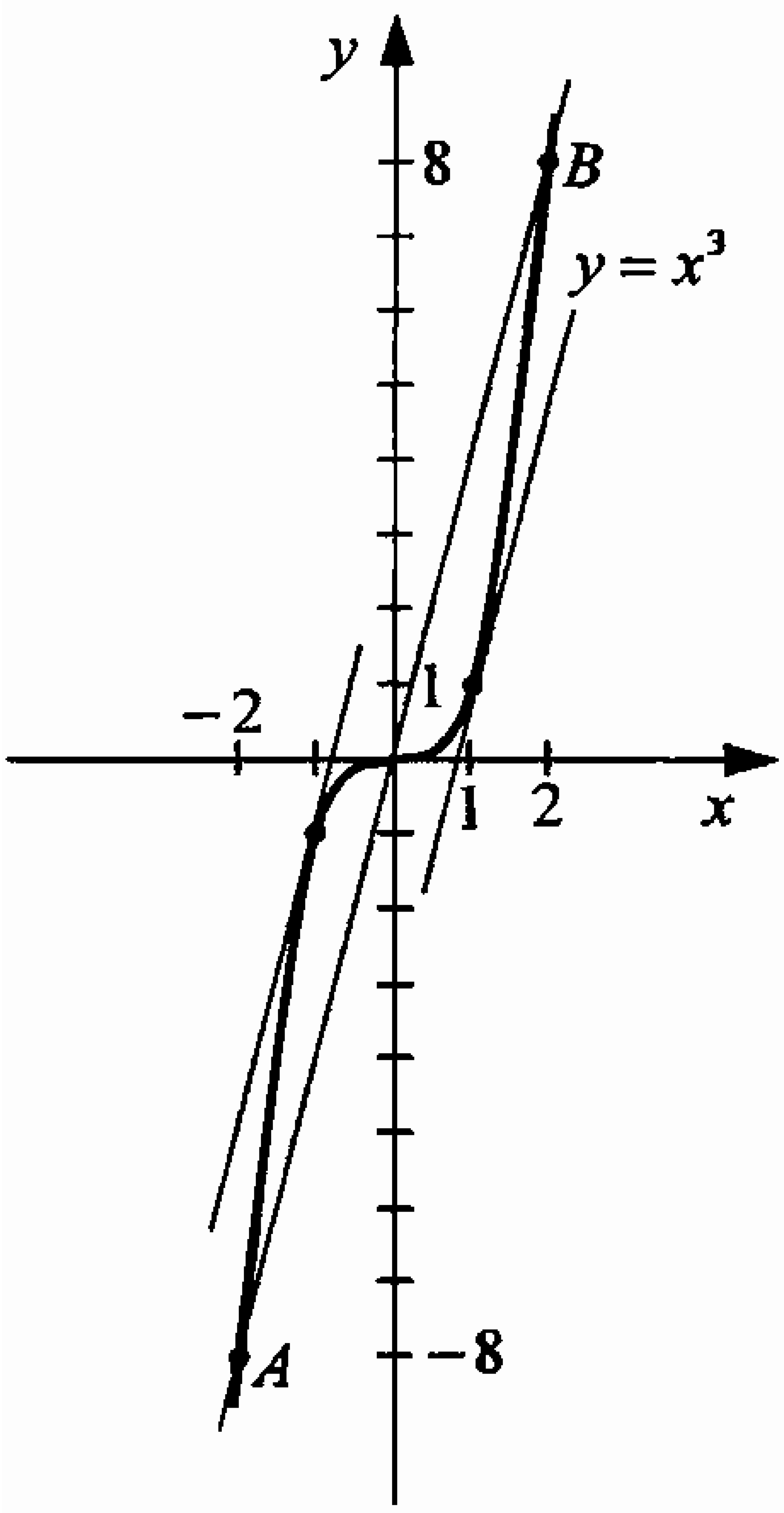
Как разность двух функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемых на интервале $(a; b)$, функция $F(x)$

непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Так как $F(a) = F(b) = 0$, то для функции $F(x)$ выполнены условия теоремы М. Ролля, поэтому существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т. е.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{или} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда следует $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. **Теорема Лагранжа доказана.**

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем: отношение $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть тангенс угла наклона прямой (секущей) AB к положительному направлению оси Ox, а $f'(c)$ — тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$, т. е. на интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка c, в которой касательная параллельна прямой AB. Отметим, что условия теоремы Лагранжа не обеспечивают единственности точки c, что показывает следующий пример. Пусть $y = x^3$, $[a; b] = [-2; 2]$, тогда по теореме Лагранжа



$$3c^2 = \frac{2^3 - (-2)^3}{2 - (-2)} \Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \in [-2; 2].$$

Теорема Коши. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на $[a; b]$, дифференцируемы на $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a; b)$, то существует хотя бы* *одна точка $c \in (a; b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$, причем $F(a) = F(b) = 0$. Поэтому в силу теоремы М. Ролля существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Отсюда получаем требуемое. **Теорема Коши доказана.**

4.7. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского

Теорема (неравенство Юнга). *Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, то $\forall x > 0$ выполняется неравенство $x^\alpha \leq$ $\leq \alpha \cdot x + \beta$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = t^\alpha -$ $- \alpha t - \beta$, в силу условий теоремы $f(1) = 1 - \alpha - \beta$, функция $f(t)$ определена на $[0; +\infty)$ и дифференцируема на $(0; +\infty)$. Применим к $f(t)$ на отрезке $[1; x]$ теорему Лагранжа

$$x^\alpha - \alpha x - \beta - 1 + \alpha + \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1), \quad 1 < c_x < x,$$

или

$$x^\alpha - \alpha x - \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1).$$

Если $x \geq 1$, то при $0 < \alpha < 1$ $c_x^{\alpha-1} \leq 1$, т. е. $c_x^{\alpha-1} - 1 \leq 0$ и $x - 1 \geq 0$, откуда следует

$$x^\alpha - \alpha x - \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1) \leq 0$$

или

$$x^\alpha \leq \alpha x + \beta \quad \text{при} \quad x \geq 1.$$

Если $0 < x \le 1$, то, применяя теорему Лагранжа к $f(t)$ на отрезке $[x; 1]$, $x \le 1$, имеем

$$1 - \alpha - \beta - x^\alpha + \alpha x + \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(1 - x), \quad x < c_x < 1,$$

$$x^\alpha - \alpha x - \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1).$$

В данных условиях $x - 1 \le 0$, $c_x^{\alpha-1} \ge 1$, тогда

$$x^\alpha - \alpha x - \beta \le 0 \quad \text{или} \quad x^\alpha \le \alpha x + \beta \quad \text{при} \quad 0 < x \le 1.$$

Теорема доказана.

Следствие (неравенство Гельдера). Положим в неравенстве Юнга $x = \dfrac{a}{b} > 0$, где $a > 0$, $b > 0$, тогда имеем неравенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \le \alpha \cdot \frac{a}{b} + \beta$$

или

$$a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \le \alpha a + \beta b,$$

$$a^\alpha \cdot b^\beta \le \alpha a + \beta b.$$

Пусть $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ — n-мерные вектора, $u_i \ge 0$, $v_i \ge 0$, тогда для чисел

$$a_i = \frac{u_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{\alpha}}} \ge 0, \qquad b_i = \frac{v_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_j^{\frac{1}{\alpha}}} \ge 0$$

имеем

$$a_i^\alpha \cdot b_i^\beta \le \alpha a_i + \beta b_i.$$

Просуммируем эти неравенства по i от 1 до n:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \cdot b_i^\beta \le \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i = \alpha + \beta = 1,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha} \cdot \frac{v_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} v_j^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta} \le 1$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i \le \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta},$$

полученное неравенство называется *неравенством Гельдера.*

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{тогда} \quad p = \frac{1}{\alpha}, \quad q = \frac{1}{\beta},$$

и в этих обозначениях неравенство Гельдера приобретает следующий общепринятый вид:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i \le \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$u_i \ge 0, \quad v_i \ge 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Теорема (неравенство Минковского). *Если выполнены условия* $p > 1, \;\; u_i \ge 0, \;\; v_i \ge 0, \;\; i = 1, \ldots, n,$ *тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Для числа $p > 1$ подберем число $q > 1$ такое, чтобы $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ или $p + q = pq$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) \cdot (u_i + v_i)^{p-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot (u_i + v_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot (u_i + v_i)^{p-1}.$$

В силу неравенства Гельдера с $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$ получаем

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Но $p = pq - q = q(p-1)$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^{p}\right)^{\frac{1}{q}},$$

отсюда

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

4.8. Признаки монотонности функции. Точки экстремума. Необходимые и достаточные условия экстремума

Теорема (достаточные условия монотонности). *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, производная $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на $(a;b)$, тогда функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на $[a;b]$.*

Доказательство. Пусть x_1, $x_2 \in [a;b]$, причем $x_1 < x_2$, тогда по формуле Лагранжа конечных приращений

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2.$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$, то при $f'(c) > 0$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \ \Rightarrow \ f(x_2) > f(x_1),$$

т.е. функция $y = f(x)$ возрастает на $[a;b]$. Аналогично доказывается второе утверждение. **Теорема доказана.**

Теорема. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела на $[a;b]$ постоянное значение, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этого отрезка ее производная была равна нулю.*

Доказательство. *Необходимость.* Если $f(x) \equiv C$ $\forall x \in [a;b]$, то $f'(x) \equiv 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a;b]$, зафиксируем $x_1 \in [a;b]$ и $x_2 \neq x_1$, тогда $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, и так как $f'(c) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$, а в силу произвольности x_2 получаем $f(x) \equiv \mathrm{Const} = f(x_1)$. **Теорема доказана.**

Пусть $c \in (a;b)$, точка c называется точкой *строгого локального максимума* (*строгого локального минимума*), если существует такая δ-окрестность точки c, $(c-\delta; c+\delta) \subset [a;b]$, что $\forall x \in (c-\delta; c+\delta)$ имеет место неравенство $f(x) < f(c)$ $(f(x) > f(c))$. Термины *локальный минимум* и *локальный максимум* принято объединять термином *локальный экстремум.*

Теорема П. Ферма (необходимое условие экстремума). *Если в точке $x = c$ дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то первая производная функции в точке $x = c$ равна нулю.*

Доказательство. Пусть $x = c$ — точка локального максимума, тогда существует δ-окрестность точки c, в которой $\forall x \in (c - \delta; c + \delta)$ имеет место неравенство $f(x) < f(c)$. Такие x можно представить в виде $x = c \pm h$, $0 < h < \delta$. Составим разностные отношения

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{-h} > 0, \qquad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0.$$

Переходя к пределу при $h \to 0+$ в этих отношениях, по следствию из теоремы о монотонности предела функции (см. §3.2) получим $f'(c-0) \geq 0$ и $f'(c+0) \leq 0$. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке c, то (см. §4.1) $f'(c) = f'(c-0) = f'(c+0)$, отсюда $f'(c) = 0$. **Теорема доказана.**

Теорема Ферма дает необходимое, но не достаточное условие наличия экстремума. Например, функция $y = x^3$ не имеет экстремума в точке $x = 0$, однако $y'(0) = 0$.

Теорема Ферма существования экстремума доказана для дифференцируемых функций, однако функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$ и имеет в этой точке локальный минимум. Поэтому при нахождении экстремумов функции надо искать их не только в *стационарных точках* (т. е. точках, где $f'(x) = 0$), но и в точках, где производная не существует или обращается в бесконечность.

Как следствие из теоремы о достаточных условиях монотонности функции получаем теорему о достаточных условиях экстремума функции.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т. е. $f'(x_0)=0$), тогда:*

1) *если $f'(x_0) > 0$ слева от x_0 и $f'(x_0) < 0$ справа от x_0, тогда x_0 — точка локального максимума;*
2) *если $f'(x_0) < 0$ слева от x_0 и $f'(x_0) > 0$ справа от x_0, тогда x_0 — точка локального минимума;*
3) *если $f'(x)$ слева и справа от x_0 имеет один знак, то x_0 не является точкой экстремума.*

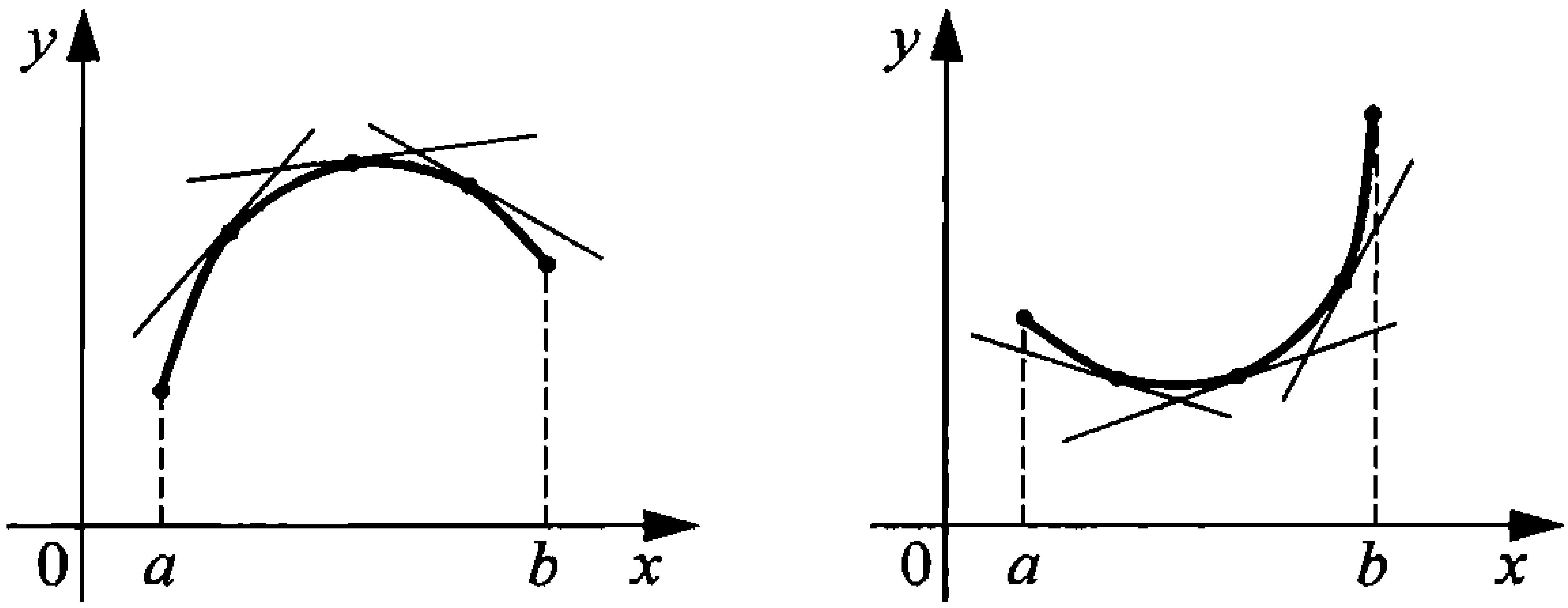
Теорема (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т. е. $f'(x_0)=0$) и в точке x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$, тогда:*

1) *если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума;*
2) *если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.*

Доказательство. Так как $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает в точке x_0, и, в силу условия $f'(x_0) = 0$, $f'(x)$ меняет знак в точке x_0 с плюса на минус, т. е. x_0 — точка локального максимума. Вторая часть теоремы доказывается точно также. **Теорема доказана.**

4.9. Выпуклость и точки перегиба. Асимптоты

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* (*выпуклым вниз*) на интервале $(a; b)$, если он на этом интервале целиком расположен ниже касательной (выше касательной), проведенной в любой точке графика.



Теорема (достаточное условие выпуклости). *Если $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ на интервале $(a;b)$, то график функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз (выпуклым вверх) на $(a;b)$.*

Доказательство. Пусть для функции $y = f(x)$ $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a;b)$ и точка $M(x_0, y_0)$ лежит на графике функции $y = f(x)$. Запишем уравнение касательной, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$:

$$Y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0),$$

здесь $(x;Y)$ — координаты текущей точки касательной. Вычтем это равенство из равенства $y = f(x)$, получим

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Далее для определенности рассматриваем случай $x > x_0$. По теореме Лагранжа о среднем найдется точка $c \in (x_0; x)$ такая, что

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0)) \cdot (x - x_0).$$

Применив еще раз теорему Лагранжа, получим

$$y - Y = f''(c_1) \cdot (c - x_0) \cdot (x - x_0), \quad c_1 \in (x_0; c).$$

Если $f''(c_1) > 0$, то $y > Y$, т.е. справа от x_0 график функции $y = f(x)$ находится выше касательной.

При $x < x_0$ аналогично получаем

$$y - Y = -f'(c)(x_0 - x) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= (f'(x_0) - f'(c)) \cdot (x - x_0), \quad c \in (x; x_0);$$

$$y - Y = f''(c_1) \cdot (x_0 - c) \cdot (x_0 - x), \quad c_1 \in (c; x_0).$$

Если $f''(c_1) > 0$, то $y > Y$, т. е. слева от x_0 график функции $y = f(x)$ находится выше касательной. Следовательно, на интервале $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ лежит выше касательной, и значит, выпуклый вниз. **Теорема доказана.**

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется такая точка, в которой меняется направление выпуклости.

Следствие (первое достаточное условие перегиба). *Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет свой знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.*

Следствие (необходимое условие перегиба). *Если точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$, так как в этой точке $f'(x)$ имеет экстремум.*

Например, функция $y = x^4$ не имеет перегиба в нуле, однако $y'' = 12x^2\Big|_{x=0} = 0$.

Теорема (второе достаточное условие перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ трижды дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$, тогда x_0 — точка перегиба.*

Доказательство. Если $f'''(x_0) \neq 0$, то либо $f'''(x_0) > 0$, либо $f'''(x_0) < 0$, тогда $f''(x)$ в точке x_0 либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает и в силу условия $f''(x_0) = 0$ меняет свой знак, а значит, согласно первому достаточному условию перегиба, получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

Прямую $x = a$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов (односторонних)

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

является бесконечным.

Прямую $y = kx + b$ называют *наклонной асимптотой* при $x \to \pm\infty$ графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0.$$

В силу определения наклонной асимптоты

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0,$$

т. е.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Отсюда получаем

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx).$$

При $k = 0$ и $b \neq 0$ наклонная асимптота окажется горизонтальной.

Пример. График функции $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и наклонную $y = x - 4$.

4.10. Правило Лопиталя

Теорема (первое правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1) *$f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a; b)$;*

2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0;$

3) $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a; b)$;

4) *существует предел* $k = \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (*конечный или бесконечный*),

тогда существует предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a по непрерывности справа $f(a) = g(a) = 0$, тогда получим пару функций, для которых на любом отрезке $[a; x] \subset [a; b]$ применима теорема Коши (см. § 4.6), т. е. $\exists\, c = c(x) \in (a; x)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

так как при $x \to a+ \;\; c = c(x) \to a+$, то

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = k.$$

Теорема доказана.

Замечание. Аналогично доказывается утверждение для левостороннего предела $x \to a-$ и, соответственно, первое правило Лопиталя справедливо и для двусторонних пределов. Необходимо только выполнение всех условий теоремы в двусторонней окрестности точки a. Утверждение теоремы справедливо также и для стремления $x \to \pm\infty$.

Теорема (второе правило Лопиталя). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условиям:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы на интервале* $(a; b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$;

3) $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a;b)$;

4) *существует предел* $k = \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (*конечный или бесконечный*),

тогда существует предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a+$ — произвольная монотонная последовательность, тогда, начиная с некоторого номера, последовательность $g(x_n) \to +\infty$ монотонно (если $g(x_n) \to -\infty$, надо рассмотреть последовательность $\{-g(x_n)\}$). Построим последовательность $\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$, которая в силу теоремы Коши (см. § 4.6) представима в виде

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}, \quad \text{где} \quad a < x_{n+1} < c_n < x_n.$$

В силу условия 4 теоремы при $n \to +\infty$ $(c_n \to a+)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = k,$$

поэтому по теореме Штольца (см. § 2.4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = k$, а значит в силу определения предела функции по Гейне получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

4.11. Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 n производных, необходимо найти многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$f(x_0) = P_n(x_0), \quad f'(x_0) = P_n'(x_0), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Будем искать этот многочлен в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1 \cdot (x - x_0) + A_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + A_n \cdot (x - x_0)^n.$$

Из условия $f(x_0) = P_n(x_0)$ получаем $A_0 = f(x_0)$, из условия $f'(x_0) = P_n'(x_0)$ получаем $A_1 = f'(x_0)$, из условия $f''(x_0) = P_n''(x_0)$ следует $A_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0)$ и т. д., $A_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Таким образом,

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

этот многочлен называется *многочленом Тейлора n-го порядка.*

Рассмотрим разность $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Очевидно $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Отсюда найдем предел отношения $\alpha_n(x) = r_n(x)/(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha_n(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \frac{0}{0} = \\ = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0,$$

т. е. (см. § 3.5) $\alpha_n(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ и $r_n(x) = \alpha_n(x) \cdot (x - x_0)^n$, а значит, $r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ при $x \to x_0$.

Итак, справедлива следующая

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ производные до n-го порядка включительно, тогда при $x \to x_0$*

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right).$$

Полученная формула называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.*

Замечание 1 (обобщение формулы для первого дифференциала). Если ввести обозначения $x - x_0 = \Delta x$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то формула Тейлора принимает вид

$$\Delta y = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k + \mathrm{o}\left((\Delta x)^n\right) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Замечание 2. Если $x_0 = 0$, то получаем частный случай формулы Тейлора, называемой *формулой Маклорена:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Следствие (единственность многочлена Тейлора). *Никакой многочлен степени меньшей или равной n, отличной от многочлена Тейлора n-го порядка, не может приближать данную функцию с точностью до* $\mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right)$ *при $x \to x_0$.*

Доказательство. Пусть некоторый многочлен $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ таков, что $f(x) = Q_n(x) + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right)$ при $x \to x_0$, тогда в силу доказанной теоремы

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{o}\left((x - x_0)^n\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Если в этом равенстве перейти к пределу при $x \to x_0$, получим $a_0 = f(x_0)$. Отбросив члены с номером $k = 0$ и поделив равенство на $x - x_0$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{k-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (x - x_0)^{k-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right).$$

Переходя в этом новом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получим $a_1 = \dfrac{f'(x_0)}{1!}$ и т. д. $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. **Следствие доказано.**

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом общего вида или в форме Шлемильха–Роша). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности $(a; b)$ точки x_0 производные до $(n+1)$-го порядка, $x \in (a; b)$, $p > 0$, тогда существует $c \in (x_0; x)$ (или $c \in (x; x_0)$) такая, что справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \left(\frac{x - x_0}{x - c}\right)^p \cdot \frac{(x - c)^{n+1}}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

Доказательство. Введем для многочлена Тейлора из правой части доказываемого равенства следующее обозначение:

$$\varphi(x, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

и составим разностное отношение

$$R_{n+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x) - \varphi(x, x_0)}{(x - x_0)^p} \quad (\text{при } x > x_0),$$

которое можно переписать в виде

$$f(x) - \varphi(x, x_0) - (x - x_0)^p \cdot R_{n+1}(x) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x - t)^p \cdot R_{n+1}(x),$$

определенную на $t \in [x_0; x]$. Эта функция обладает свойствами:

а) $\phi(t)$ — определена, дифференцируема по t (а значит, и непрерывна) на $(x_0; x)$;

б) $\phi(x_0) = \phi(x) = 0$,

т. е. для $\phi(t)$ выполнены все условия теоремы Ролля (§ 4.6), следовательно, существует $c \in (x_0; x)$ такая, что $\phi'(c) = 0$. Выпишем это равенство в развернутом виде:

$$\phi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right) +$$

$$+ p \cdot (x - t)^{p-1} \cdot R_{n+1}(x) =$$

$$= p \cdot (x-t)^{p-1} \cdot R_{n+1}(x) - f'(t) - \left[\left(\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{0!} \right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x - t) \right) +$$

$$+ \left(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x - t)^3 - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x - t)^2 \right) +$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \right) \right] =$$

$$= p \cdot (x - t)^{p-1} \cdot R_{n+1}(x) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Отсюда

$$\phi'(c) = p \cdot (x-c)^{p-1} \cdot R_{n+1}(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = 0$$

или

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p \cdot n!}(x-c)^{n-p+1}.$$

Из разностного отношения для $R_{n+1}(x)$ вытекает представление

$$f(x) = \varphi(x, x_0) + (x-x_0)^p \cdot R_{n+1}(x) =$$
$$= \varphi(x, x_0) + \left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^p \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

Аналогично рассматривается случай $x < x_0$. **Теорема доказана.**

Замечание 3. Если $p = n+1$, то представление для остаточного члена вида

$$\left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^p \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c)\Bigg|_{p=n+1} = f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

называется остаточным членом *в форме Лагранжа.*

Замечание 4. Если $p = 1$, $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$, то представление для остаточного члена приобретает вид

$$\frac{x-x_0}{x-c} \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{1 \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c)\Bigg|_{c=x_0+\theta(x-x_0)} =$$
$$= \frac{x-x_0}{(x-x_0)(1-\theta)} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1}}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) =$$
$$= (x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n \cdot \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!},$$

который называют записью остаточного члена *в форме Коши.*

Теорема (третье достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $2n$-го порядка причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(2n)}(x_0) \neq 0,$$

тогда:

а) *если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума;*

б) *если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.*

Доказательство. При $n = 1$ получаем второе достаточное условие экстремума, при $n > 1$ производную $f'(x)$ выразим по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(2n-2)}(x_0)}{(2n-3)!}(x-x_0)^{2n-3} +$$

$$+\frac{f^{(2n-1)}(c)}{(2n-2)!}(x-x_0)^{2n-2} = \frac{f^{(2n-1)}(c)}{(2n-2)!}(x-x_0)^{2n-2}.$$

Если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то $f^{(2n-1)}(x)$ убывает и при переходе x через x_0 (тогда c тоже переходит через x_0) меняет свой знак с плюса на минус, и точно также будет менять свой знак $f'(x)$, что в силу первого достаточного условия экстремума и означает утверждение теоремы. Вторая часть теоремы доказывается также. **Теорема доказана.**

Теорема (третье достаточное условие перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $(2n+1)$-го порядка, причем*

$$f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0,$$

тогда x_0 — точка перегиба.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, разложим вторую производную по формуле Тейлора:

$$f''(x) = \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n-2)!}(x-x_0)^{2n-2}.$$

Так как $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, то $f^{(2n)}(x)$ при переходе аргумента через x_0 меняет свой знак, а значит будет менять свой знак вторая производная, что в силу первого достаточного условия перегиба и означает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Пример 1. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \quad x \in R,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right),$$
$$x \in R,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right), \quad x \in R,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$
$$+ \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right), \quad |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right),$$
$$-1 < x \leq 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right),$$
$$|x| \leq 1,$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad 0 \leq x < 1,$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right), \quad x \in R,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right),$$

$$x \in R,$$

$$\arcsin x = x + \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right),$$

$$|x| \le 1.$$

Пример 2. Ряд Тейлора не всегда представляет породившую его функцию, так для функции

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f^{(k)}(0) = 0 \ \ \forall k \in N$, т. е. ее ряд Маклорена тождественно нулевой, хотя $f(x) \neq 0$.

Пример 3. Вычисление значений функций $\sin x$ и $\cos x$. Значения функций $\sin x$ и $\cos x$ при $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ полностью определяют значения этих функций при остальных x, поэтому ограничимся вычислениями при этих значениях аргумента. Для $\sin x$ остаточный член в форме Лагранжа в формуле Маклорена имеет вид

$$R_{2n+3}(x) = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\left(c + (n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ справедливо неравенство

$$|R_{2n+3}(x)| \le \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} < \frac{(0{,}8)^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Для $\cos x$

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} < \frac{(0{,}8)^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Поэтому, чтобы обеспечить при вычислении $\sin x$ точность 10^{-8}, достаточно выбрать n таким, чтобы удовлетворить неравенству

$$\frac{(0{,}8)^{2n+3}}{(2n+3)!} < 10^{-8},$$

которое выполняется уже при $n = 3$, т. е.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}.$$

Чтобы обеспечить при вычислении $\cos x$ точность 10^{-7}, достаточно удовлетворить неравенству

$$\frac{(0{,}8)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-7},$$

которое выполняется уже при $n = 3$, т. е.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}.$$

Пример 4. Вычисление значений функции $\ln x$. Любое число $x > 0$ единственным образом представимо в виде $x = 2^\alpha \cdot M,\ \ \alpha \in Z,\ \ \frac{1}{2} \leq M < 1$, тогда $\ln x = \alpha \cdot \ln 2 + \ln M$, где $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. Число M в свою очередь можно представить в виде

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \text{где } \beta = \frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1} \quad \overset{\frac{1}{2}\leq M<1}{\Longrightarrow} \quad |\beta| < 0{,}172,$$

и значит

$$\ln x = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\ln 2 + \ln\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Число $\sqrt{2}$ можно найти по итерационной формуле Герона (см. § 2.4, пример 3). Для функции $\ln\dfrac{1+\beta}{1-\beta}$ остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{2n+3}(\beta) = \frac{\beta^{2n+3}}{2n+3}\left[\frac{1}{(1+c)^{2n+3}} + \frac{1}{(1-c)^{2n+3}}\right], \quad |c| < \beta.$$

Далее для определенности $\beta > 0$, тогда

$$|R_{2n+3}(\beta)| \le \frac{0{,}172^{2n+3}}{2n+3}\left[1 + \frac{1}{(1-0{,}172)^{2n+3}}\right] \le$$

$$\le \frac{0{,}172^{2n+3} + 0{,}208^{2n+3}}{2n+3} < 10^{-7}$$

при $n = 3$, т. е.

$$\ln x = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\ln 2 + 2\left(\beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} + \frac{\beta^7}{7}\right).$$

5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана

5.1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$. Дифференцируемая функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$ на $(a; b)$, если во всех точках интервала $F'(x) = f(x)$.

Очевидно, если $F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то $F(x)+c$ при любом $c \in R$ также является первообразной для $y = f(x)$. Обратно, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $y = f(x)$ на $(a; b)$, т. е. $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$, то $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ или $F_1(x) = F_2(x) + c$ при любом $c \in R$.

Таким образом, если $F(x)$ является некоторой первообразной для функции $y = f(x)$ на $(a; b)$, то всякая функция вида $F(x) + c$ также является первообразной, и наоборот, всякая первообразная функции $y = f(x)$ представима в виде $F(x) + c$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$, определенных на интервале $(a; b)$, называется *неопределенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на этом интервале и обозначается через

$$\int f(x)\,dx.$$

Принято писать

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Непосредственно из определения неопределенного интеграла следуют свойства:

Свойство 1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

Свойство 2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx$.

Свойство 3. $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c$.

Свойство 4 (линейность неопределенного интеграла). Для любого $\alpha \in R$:

а) $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$;

б) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

Действительно, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то

$$\alpha \int f(x)\,dx = \alpha(F(x) + c) = \alpha F(x) + c_1 = \int \alpha f(x)\,dx,$$

так как $(\alpha F(x))' = \alpha f(x)$.

Если $F_1(x)$ — первообразная для функции $f_1(x)$, $F_2(x)$ — первообразная для функции $f_2(x)$, то $(F_1(x) \pm F_2(x))' = f_1(x) \pm f_2(x)$, поэтому

$$\int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx = (F_1(x) + c_1) \pm (F_2(x) + c_2) =$$

$$= (F_1(x) \pm F_2(x)) + (c_1 \pm c_2) = \int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx.$$

5.2. Основные методы интегрирования (замена переменных, интегрирование по частям)

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, функция $\varphi(t)$ определена и дифференцируема на интервале $(c; d)$, причем $\varphi(t) : (c; d) \to (a; b)$, функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на интервале $(a; b)$, тогда $F(\varphi(t))$ является первообразной для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на интервале $(c; d)$, и поэтому*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Доказательство. Очевидно по правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

отсюда и следует утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Пример 1.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x = a \sin t \\ dx = a \cos t\, dt \\ t = \arcsin \dfrac{x}{a} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t\, dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2} \cdot t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + c = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cos\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)\right) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = \left\{ \begin{array}{c} x = a \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}\, dt \\ t = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} \end{array} \right\} = \int \frac{\cos^3 t}{a^3} \cdot \frac{a\, dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \sin t + c = \frac{1}{a^2} \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) + c = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} + c,$$

поскольку

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + tg^2 t}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Теорема 2. *Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, существует интеграл $\int v\,du$, тогда существует интеграл $\int u\,dv$ и справедливо равенство*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Доказательство. Найдем дифференциал произведения функций uv

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Отсюда получаем

$$u\,dv = d(uv) - v\,du. \qquad (*)$$

По свойству 3 неопределенного интеграла

$$\int d(uv) = uv + c,$$

отсюда в силу условий теоремы и свойства линейности неопределенного интеграла существует интеграл от правой части равенства $(*)$, поэтому существует интеграл от левой части равенства $(*)$ и

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du = uv - \int v\,du.$$

Теорема доказана.

Пример 3.

$$\int x \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Пример 4.

$$I = \int e^x \sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & dv = \sin x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx;$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & dv = \cos x \, dx \\ du = e^x \, dx & v = \sin x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Отсюда получаем для интеграла I уравнение

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

решая которое, находим

$$I = \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$

5.3. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором отрезке $[a; b]$. Разобьем этот отрезок на частичные отрезки точками $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_T} = b$, величину

$$\delta_T = \max_{i=1,\ldots,n_T} \Delta x_i = \max_{i=1,\ldots,n_T} |x_i - x_{i-1}|$$

называют *мелкостью разбиения* T. На каждом из частичных отрезков (внутри или на его концах) выберем по точке $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и составим сумму

$$S(f(x); T; \xi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

которую называют *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Очевидно, эта сумма зависит не только от функции $f(x)$, но и от способа разбиения T и выбора точек ξ. Процесс, состоящий в неограниченном увеличении числа точек разбиения и стремлении к нулю длин всех без исключения частичных отрезков разбиения, принято обозначать так: $\delta_T \to 0$. Естественно, при таком процессе будут каким-то образом меняться и интегральные суммы Римана $S(f(x);T;\xi)$.

Определение (*по Коши*). Говорят, что интегральные суммы Римана $S(f(x);T;\xi)$ для функции $f(x)$ имеют конечный предел I при $\delta_T \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T, мелкость которого $\delta_T < \delta_\varepsilon$, и для любого выбора точек ξ выполняется неравенство

$$|S(f(x);T;\xi) - I| < \varepsilon.$$

Определение (*по Гейне*). Говорят, что интегральные суммы Римана $S(f(x);T;\xi)$ для функции $f(x)$ имеют конечный предел I при $\delta_T \to 0$, если для любой последовательности разбиений T_n, такой что $\delta_{T_n} \to 0$, и при любом выборе точек ξ_n существует предел последовательности $S(f(x);T_n;\xi_n)$ и он равен I.

Таким образом, если этот предел существует, то он зависит только от функции $f(x)$ и отрезка $[a;b]$ и не зависит ни от способа разбиения T, ни от выбора точек ξ.

Число I называется *определенным* (*римановым*) *интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

при этом функцию $f(x)$ называют *интегрируемой на отрезке* $[a;b]$. При заданных a и b определенный интеграл I является числом, а числа a и b называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования.*

Замечание 1 (необходимое условие интегрируемости). Естественно возникает вопрос: при каких условиях интегральная сумма имеет конечный предел, т. е. при каких условиях для данной функции существует ее определенный интеграл на данном отрезке? Таким *необходимым условием* является ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Действительно, если функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$, то она неограничена на некотором частичном отрезке, а значит на этом частичном отрезке точку ξ_i можно выбрать таким образом, что соответствующее слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ будет сколь угодно большим (неограниченным), следовательно, будет неограниченной вся интегральная сумма $S(f(x);T;\xi)$.

Отметим, что ограниченность *не является достаточным условием* интегрируемости и соответствующий контрпример доставляет функция Дирихле (см. §3.1). Действительно, если выбирать все $\xi_i \in Q$ рациональными, то $S(D(x);T;\xi) = b - a$, а если выбрать все $\xi_i \in R \setminus Q$ иррациональными, то $S(D(x);T;\xi) = 0$. Таким образом, результат вычисления предела интегральных сумм Римана $S(D(x);T;\xi)$ при $\delta_T \to 0$ зависит от выбора точек ξ_i, что и означает неинтегрируемость функции Дирихле по Риману на любому отрезке $[a;b]$.

Замечание 2 (геометрический смысл определенного интеграла). Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, тогда сумма $S(f(x);T;\xi)$ представляет собой площадь ступенчатой фигуры, приближающей площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$. Такое приближение тем точнее, чем меньше мелкость разбиения. Следовательно, численное значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равно площади такой трапеции.

5.4. Суммы и интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости Римана

Введем обозначения

$$m_i = \inf_{[x_{i-1};x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

и составим две интегральные суммы

$$s(f(x);T) = \sum_{i=1}^{n_T} m_i \Delta x_i, \qquad S(f(x);T) = \sum_{i=1}^{n_T} M_i \Delta x_i,$$

называемые *нижней и верхней интегральными суммами Дарбу* функции $f(x)$, очевидно $\forall \xi$

$$s(f(x);T) \le S(f(x);T;\xi) \le S(f(x);T).$$

Отметим некоторые свойства сумм Дарбу.

Свойство 1. *Если к имеющимся точкам разбиения T отрезка $[a;b]$ добавить новые точки деления, то нижняя сумма Дарбу $s(f(x);T)$ может только не уменьшиться, а верхняя $S(f(x);T)$ — только не увеличиться.*

Доказательство. Пусть к разбиению T добавилась одна точка x' и она попала в отрезок $[x_{i-1};x_i]$, полученное новое разбиение обозначим T'. Пусть s и s' — нижние суммы, S и S' — верхние суммы Дарбу, соответствующие разбиениям T и T'. Очевидно, суммы s и s' отличаются лишь членами, соответствующими отрезку $[x_{i-1};x_i]$. В сумму s входит слагаемое $m_i\Delta x_i$, а в сумму s' — два слагаемых $m_i'\Delta x_i'$ и $m_i''\Delta x_i''$, где $\Delta x_i' = x' - x_{i-1}$, $\Delta x_i'' = x_i - x'$, $m_i' = \inf\limits_{[x_{i-1};x']} f(x)$, $m_i'' = \inf\limits_{[x';x_i]} f(x)$. Поскольку $m_i \le m_i'$, $m_i \le m_i''$ и $\Delta x_i' + \Delta x_i'' = \Delta x_i$, то $m_i'\Delta x_i' + m_i''\Delta x_i'' \ge m_i\Delta x_i$, и значит, $s' \ge s$. Если к разбиению T добавилось несколько точек, то, последовательно вводя их по одной, получим это же неравенство. Аналогично доказывается другое неравенство $S' \le S$. **Свойство 1 доказано.**

Свойство 2. *Нижняя сумма s любого разбиения T не превосходит верхней суммы S' любого другого разбиения T'.*

Доказательство. Рассмотрим третье разбиение $T'' = T' \cup T$, состоящее из всех точек, входящих как в T, так и в T'. Причем T'' можно получить как из T, так и из T' путем добавления конечного числа точек деления. Если s'' и

S'' — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для разбиения T'', то согласно первому свойству сумм Дарбу $s \le s'' \le S'' \le S$. **Свойство 2 доказано.**

Свойство 3. *Множества значений всех верхних и нижних сумм Дарбу ограничены.*

Доказательство. Пусть $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ и T — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, тогда

$$m\sum_{i=1}^{n_T} \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n_T} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n_T} M_i \Delta x_i \le M\sum_{i=1}^{n_T} \Delta x_i,$$

т. е. $m(b-a) \le s \le S \le M(b-a)$. **Свойство 3 доказано.**

Таким образом, множество $\{s\}$ всех нижних сумм Дарбу ограничено сверху (например, любой верхней суммой), а множество $\{S\}$ всех верхних сумм ограничено снизу. Следовательно, множество $\{s\}$ имеет точную верхнюю грань $I_* = \sup s$, а множество $\{S\}$ — точную нижнюю грань $I^* = \inf S$, причем для любых верхней и нижней интегральных сумм s и S выполняется неравенство $s \le I_* \le I^* \le S$ или $0 \le I^* - I_* \le S - s$.

Числа I^* и I_* называются *верхним и нижним интегралами Дарбу.*

Теорема (необходимое и достаточное условие интегрируемости). *Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ *такое, что для любого разбиения* T, *мелкость которого* $\delta_T < \delta_\varepsilon$, *выполнялось неравенство* $|S_T - s_T| < \varepsilon$, *т. е.* $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T, мелкость которого $\delta_T < \delta_\varepsilon$, и $\forall \xi$ выполняется неравенство $|S(f(x); T; \xi) - I| < \varepsilon$ или $I - \varepsilon <$

$< S(f(x);T;\xi) < I+\varepsilon$. В силу произвольности выбора точек ξ и свойства монотонности предела имеем

$$I-\varepsilon \le S_T \le I+\varepsilon \quad \text{и} \quad I-\varepsilon \le s_T \le I+\varepsilon,$$

отсюда $I-\varepsilon \le s_T \le S_T \le I+\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{\delta_T\to 0} S_T = \lim\limits_{\delta_T\to 0} s_T = I$, и значит $\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T - s_T) = 0$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T - s_T) = 0$, тогда в силу неравенства $s_T \le I_* \le I^* \le S_T$ получаем $I_* = I^*$. Обозначим их общее значение через $I = I_* = I^*$, тогда из неравенства $s_T \le I \le S_T$ получаем $0 \le I - s_T \le \le S_T - s_T$ и $0 \le S_T - I \le S_T - s_T$, а значит $\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T - I) = \lim\limits_{\delta_T\to 0}(I - s_T) = 0$, т. е. $I = \lim\limits_{\delta_T\to 0} S_T = \lim\limits_{\delta_T\to 0} s_T$. Поскольку $s_T \le S(f(x);T;\xi) \le S_T$, то получаем $\lim\limits_{\delta_T\to 0} S(f(x);T;\xi) = I$, т. е. существует предел интегральных сумм Римана, а значит существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. **Теорема доказана.**

5.5. Классы функций, интегрируемых по Риману

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то в силу теоремы Кантора (см. § 3.8) она равномерно непрерывна на этом отрезке, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0$ такое, что для любых $x', x'' \in [a;b]$ таких, что $|x'-x''| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[a;b]$, мелкость которого $\delta_T < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$0 \le S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n_T}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n_T}\Delta x_i = \\ = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T - s_T) = 0$, а значит функция $y = f(x)$ интегрируема. **Теорема доказана.**

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ монотонна и ограничена на $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть для определенности функция $y = f(x)$ неубывающая, тогда $f(b) - f(a) > 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим разбиение T, мелкость которого $\delta_T < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, тогда для такого разбиения

$$0 \le S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n_T}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\sum_{i=1}^{n_T}(M_i - m_i) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\sum_{i=1}^{n_T}(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T - s_T) = 0$. **Теорема доказана.**

5.6. Свойства определенного интеграла

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Доказательство. Пусть T — разбиение отрезка $[a; b]$, причем $b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n = a$, тогда для i-го отрезка разбиения $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$, а значит $S(f(x); T; \xi)$ меняет свой знак при сохранении значений $f(\xi_i)$.

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b dx = b - a.$

Доказательство. В первом случае все $\Delta x_i = 0$, а во втором для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ и для любого выбора ξ_i имеем

$$\int_a^b dx = \sum_{i=1}^{n_T} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = (b-a).$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то $\forall k \in R$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Очевидно, для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ и для любого выбора ξ_i имеет место равенство $S(kf(x); T; \xi) = kS(f(x); T; \xi)$, поэтому если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\delta_T \to 0} S(kf(x); T; \xi) =$$

$$= k\lim_{\delta_T \to 0} S(f(x); T; \xi) = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ и для любого выбора ξ_i справедливо равенство

$$S(f(x) \pm g(x); T; \xi) = S(f(x); T; \xi) \pm S(g(x); T; \xi),$$

поэтому если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \lim_{\delta_T \to 0} S(f(x) \pm g(x); T; \xi) =$$

$$= \lim_{\delta_T \to 0} (S(f(x); T; \xi) \pm S(g(x); T; \xi)) = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из очевидного равенства

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}\left((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2\right)$$

и следующей вспомогательной леммы.

Лемма. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то функция $f^2(x)$ также интегрируема на этом отрезке.*

Сформулированная лемма является простым следствием из теоремы об интегрируемости сложной функции (см. следующий § 5.7).

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c; d] \subset [a; b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, T — некоторое разбиение отрезка $[a; b]$, тогда $S_T - s_T < \varepsilon$ при $\delta_T < \delta_\varepsilon$. Рассмотрим разбиение $T_1 = T \cup \{c, d\}$, тогда

$$s_T \le s_1 \le S_1 \le S_T, \quad \text{т. е.} \quad S_1 - s_1 \le S_T - s_T < \varepsilon.$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[c; d]$ точками разбиения T_1, тогда для $\overline{S}$ и $\overline{s}$ на $[c; d]$ справедливы неравенства

$$0 < \overline{S} - \overline{s} \le S_1 - s_1 \le S_T - s_T < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{\delta_T \to 0} (\overline{S} - \overline{s}) = 0$.

7. *Свойство аддитивности.* Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то она интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Сначала покажем интегрируемость на отрезке $[a; b]$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, T_1 — разбиение отрезка $[a; c]$ мелкости $\delta_{T_1} < \delta_\varepsilon$, тогда $S_1 - s_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, T_2 — разбиение отрезка $[c; b]$ мелкости $\delta_{T_2} < \delta_\varepsilon$, тогда $S_2 - s_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a; b]$ вида $T = T_1 \cup T_2$, тогда $\delta_T < \delta_\varepsilon$ и $S - s = (S_1 + S_2) - (s_1 + s_2) < \varepsilon$, т.е. $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Теперь докажем интегральное равенство. Пусть T — разбиение отрезка $[a; b]$, в котором c является точкой разбиения, тогда

$$S(f(x); T; \xi) = \sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i + \sum{}'' f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где в $\sum{}'$ осуществляется суммирование по частичным отрезкам из $[a; c]$, а в $\sum{}''$ — по частичным отрезкам из $[c; b]$. Переходя здесь к пределу при $\delta_T \to 0$, получим требуемое интегральное равенство.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Доказательство. Для любого разбиения T и при любом выборе точек ξ_i $S(f(x); T; \xi) \geq 0$, откуда и следует доказываемое неравенство.

Из свойства 8 вытекает следующее

Следствие. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.*

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a; b]$ и

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f(x)|$ является следствием из теоремы об интегрируемости сложной функции (см. следующий § 5.7). Проинтегрировав неравенство $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ по отрезку $[a; b]$, в силу следствия из свойства 8 получаем требуемое неравенство.

5.7. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

1. Для формулировки этого критерия потребуется понятие *множества, имеющего лебеговскую меру ноль*. Записывается это так: $\mu(A) = 0$.

Определение. Множество $A \subset R$ имеет *лебеговскую меру ноль*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное или счетное покрытие множества A интервалами с общей длиной, не превосходящей ε (т. е. $\forall \varepsilon > 0$ существует система интервалов $\{I_n\} \equiv \{I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots\}$ с длинами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ таких, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ и $\forall n \in N$ $s_n = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n < \varepsilon$).

Лемма 1. *Любое не более чем счетное множество точек $\{x_n\} \in R$ имеет лебеговскую меру ноль.*

Доказательство. Точки такого множества можно покрыть интервалами с центрами в этих точках и длинами $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \delta_2 = \frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, \delta_n = \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$ Тогда $s_n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \varepsilon$. **Лемма 1 доказана.**

Лемма 2. *Пусть $B \subset A$ и $\mu(A) = 0$, тогда $\mu(B) = 0$.*

Справедливость леммы 2 следует из того очевидного факта, что всякое покрытие множества A также является покрытием множества B.

2. Далее потребуется еще одно понятие — это *колебание функции в точке*. Для его формулировки введем в рассмотрение систему промежутков на $[a; b]$, а именно:

если $x_0 \in (a;b)$ — внутренняя точка $[a;b]$, $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a;b]$;

если $x_0 = a$, $I_\delta(x_0) = I_\delta(a) = [a, a+\delta)$;

если $x_0 = b$, $I_\delta(x_0) = I_\delta(b) = (b-\delta, b]$.

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, т. е. выполнено необходимое условие интегрируемости.

Определение. *Колебанием функции $f(x)$ в точке x_0* называется величина

$$\omega(x_0) = \omega_f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\delta>0} \sup_{x,\, y \in I_\delta(x_0)} (f(x) - f(y)) =$$

$$= \inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0)),$$

где

$$M_\delta(x_0) = \sup_{I_\delta(x_0)} f(x), \qquad m_\delta(x_0) = \inf_{I_\delta(x_0)} f(x).$$

Лемма 3. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда колебание функции $f(x)$ в точке x_0 равно нулю, т. е. $\omega_f(x_0) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость* (от противного). Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, но $\omega_f(x_0) = \alpha > 0$, тогда в соответствии с определением точной нижней грани числового множества (см. § 1.5) для любой последовательности чисел $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$ и соответствующей ей последовательности промежутков $I_{\delta_n}(x_0)$ выполняются неравенства

$$\sup_{x,\, y \in I_{\delta_n}(x_0)} (f(x) - f(y)) = M_{\delta_n}(x_0) - m_{\delta_n}(x_0) \geq \alpha > \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Отсюда в соответствии с определением точной верхней грани числового множества (см. § 1.5) найдутся пары точек $x_n, y_n \in I_{\delta_n}(x_0)$ такие, что

$$f(x_n) - f(y_n) > \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Поскольку длина промежутка $I_{\delta_n}(x_0)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве, в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 получаем

$$f(x_0) - f(x_0) = 0 \geq \frac{\alpha}{2} > 0,$$

или $\alpha = 0$, т. е. $\omega_f(x_0) = 0$.

Достаточность. Если $\omega_f(x_0) = 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что

$$0 \leq \sup_{x,\, y \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0)} (f(x) - f(y)) < \varepsilon$$

или $\forall x, y \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0)\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Полагая в этом неравенстве $y = x_0$, получим $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т. е. имеем развернутую форму записи определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 (см. §3.6). **Лемма 3 доказана.**

3. Теперь сформулируем и докажем критерий Лебега.

Теорема (критерий Лебега — 1). *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы множество D точек разрыва этой функции имело лебеговскую меру ноль (т. е. $\mu(D) = 0$).*

Доказательство. *Необходимость* (от противного). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, но множество D не является множеством лебеговской меры ноль, т. е. $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \{I_n\},\ D \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n,\ \exists n_0 \in N$, что $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{n_0} \geq \varepsilon_0$ (естественно, n_0 зависит от системы интервалов $\{I_n\}$).

Пусть T — произвольное разбиение $[a; b]$ точками x_k (их конечное число). Из множества частичных отрезков разбиения выделим те из них, внутри которых есть точки множества D (такие всегда есть, так как если бы их не было, то все точки множества D оказались бы среди точек разбиения x_k, и значит их было бы конечное количество, а тогда по лемме 1 $\mu(D) = 0$). На каждом таком частичном отрезке разность $M_i - m_i \geq \alpha > 0$ (если $\alpha = 0$, то $M_i = m_i$, что означает постоянство функции на частичном отрезке, а значит, ее непрерывность на этом отрезке, т. е. отсутствие в нем точек разрыва), где α — некоторое число и сумма длин этих частичных отрезков не меньше ε_0, причем такие частичные отрезки содержат все множество D, за исключением, быть может, конечного числа его точек, оказавшихся точками разбиения T. (Если бы сумма длин таких частичных отрезков оказалась бы меньше ε_0, то это означало бы существование покрытия множества D конечной системой интервалов с суммой длин меньше ε_0, что противоречит предположению.) Тогда для разбиения T справедливо неравенство $S_T - s_T \geq \alpha \cdot \varepsilon_0 > 0$, а значит $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) \geq \alpha \cdot \varepsilon_0$, что в силу критерия Римана (см. § 5.4) и означает неинтегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Полученное противоречие означает, что необходимость утверждения теоремы доказана.

Достаточность. Пусть множество D имеет лебеговскую меру ноль. Введем обозначения: $\varepsilon > 0$, $M = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)|$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4M}$, $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Поскольку множество D имеет меру ноль, то его можно покрыть системой интервалов $I \equiv \{I_n\}$, имеющих суммарную длину меньше δ, тогда на множестве $A \equiv [a; b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ функция $f(x)$ непрерывна, поэтому по лемме 3 $\forall x_0 \in A$ $\omega_f(x_0) = 0$, а значит существует интервал $I(x_0)$, покрывающий x_0, на котором $M(x_0) - m(x_0) < \alpha$. В результате получена система интервалов $J \equiv \{I(x_0)\}$, покрывающая множество A. Тогда объединенная система интервалов $I \cup J$ покрывает весь отрезок $[a; b]$ (компактное множество, см. § 3.9), и по лемме Бореля (см. § 3.9) из этой системы можно выделить конечное подпокрытие. Концы интервалов, вошедших в такое подпокрытие, зададут некоторое разбиение T отрезка $[a; b]$. Составим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу для этого разбиения и рассмотрим их разность $S_T - s_T = \sum\limits_{n=1}^{n_T}(M_i - m_i)\Delta x_i$. Теперь рассортируем члены этой суммы на две группы: к первой группе отнесем те слагаемые, для которых частичный интервал (x_{i-1}, x_i) является интервалом системы I или частью какого-либо интервала системы I, ко второй группе отнесем все остальные слагаемые. Тогда справедливы неравенства:

$$0 < S_T - s_T = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 < 2M\delta + \alpha \cdot \sum\nolimits_2 \Delta x_i <$$

$$< 2M\delta + \alpha \cdot (b-a) = 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Тем самым доказано равенство $\inf\limits_T(S_T - s_T) = 0$, что в свою очередь означает справедливость предельного равенства $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$. (См. по этому поводу замечание ниже.) **Теорема доказана.**

Замечание (дополнение к доказательству критерия Лебега-1). Покажем, что из равенства $\inf\limits_T(S_T - s_T) = 0$ следует предельное равенство $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$.

Действительно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists T_1$ такое, что $S_{T_1} - s_{T_1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, пусть n — количество точек разбиения T_1. Поскольку функция $f(x)$ ограничена на $[a; b]$, т. е. $\exists M > 0$, что $|f(x)| < M$, тогда введем величину $\delta = \dfrac{\varepsilon}{8nM}$ и рассмотрим произвольное разбиение T_2, мелкость которого $\delta_{T_2} < \delta$. Для нового разбиения $T = T_1 \cap T_2$ в силу свойства 2 интегральных сумм Дарбу (см. § 5.4) справедливы неравенства $S_T - s_T \le$ $\le S_{T_1} - s_{T_1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $S_T - s_T \le S_{T_2} - s_{T_2}$.

Оценим разность $S_{T_2} - s_{T_2}$. Поскольку для такой разности справедливо представление

$$S_{T_2} - s_{T_2} = S_T - s_T + ((S_{T_2} - s_{T_2}) - (S_T - s_T)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + ((S_{T_2} - s_{T_2}) - (S_T - s_T)),$$

то достаточно оценить выражение в скобках. Разбиение T является измельчением (продолжением) разбиения T_2 путем добавления некоторых точек разбиения T_1, поэтому разности $(S_{T_2} - s_{T_2})$ и $(S_T - s_T)$ отличаются некоторыми слагаемыми, количество которых не превосходит n (количества отрезков разбиения T_1), но длина каждого такого отрезка разбиения $\Delta x_i < \delta_{T_2} < \delta$, поэтому

$$(S_{T_2} - s_{T_2}) - (S_T - s_T) \leq 4Mn\delta,$$

тогда

$$S_{T_2} - s_{T_2} < \frac{\varepsilon}{2} + 4Mn \cdot \frac{\varepsilon}{8nM} = \varepsilon,$$

что и означает справедливость предельного равенства $\lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T - s_T) = 0$.

Применим критерий Лебега к доказательству следующий двух теорем.

Теорема (об интегрируемости сложной функции). *Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$, $g(x) \in C[m;M]$, тогда сложная функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a;b]$.*

Доказательство. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 по теореме о непрерывности сложной функции (см. § 3.6). Поэтому точки разрыва сложной функции $g(f(x))$ могут находиться лишь среди точек разрыва функции $f(x)$. Поскольку $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то по критерию Лебега–1 мера множества точек разрыва функции $f(x)$ равна нулю, а это означает (см. лемму 2 текущего параграфа), что мера Лебега множества точек разрыва сложной функции $g(f(x))$ также равна нулю, что в свою очередь (в соответствии с критерием Лебега–1) означает интегрируемость сложной функции. **Теорема доказана.**

Пример. Применим эту теорему для завершения доказательства свойств 5 и 9 определенного интеграла (см. § 5.6). Поскольку функции $g_1(x) = x^2$ и $g_2(x) = |x|$ непрерывны на всей числовой оси, то из интегрируемости функции $f(x)$ на $[a; b]$ следует интегрируемость на этом же отрезке ее квадрата $f^2(x)$ и абсолютной величины $|f(x)|$.

Теорема (об интегрируемости монотонной функции). *Если функция $y = f(x)$ монотонна на $[a; b]$, тогда $y = f(x)$ интегрируема на этом отрезке $[a; b]$.*

Доказательство. По теореме о точках разрыва монотонной функции (см. § 3.6) $y = f(x)$ может иметь на отрезке $[a; b]$ только разрывы первого рода. Пусть x_0 — точка разрыва функции $y = f(x)$, $l_1 = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $l_1 \neq l_2$, поставим точке x_0 в соответствие рациональное число из интервала с концами l_1 и l_2 (такое всегда найдется по теореме о плотности Q в R, см. § 1.4), но множество Q — счетно (см. первую теорему Кантора § 1.7), а значит, множество точек разрыва функции $y = f(x)$ не более чем счетно (см. теорему 2 из § 1.7), по лемме 1 текущего параграфа это множество имеет меру нуль, что в силу критерия Лебега означает интегрируемость функции $y = f(x)$. **Теорема доказана.**

4. При исследовании на интегрируемость по Риману той или иной функции иногда удобно использовать *критерий Лебега в иной форме.* Для его формулировки введем множество

$$D(\alpha) = \{x \mid \omega_f(x) \geq \alpha\}.$$

Отметим, что это множество замкнуто.

Теорема (критерий Лебега–2). *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \alpha > 0$ $\mu(D(\alpha)) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Так как функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то $\mu(D) = 0$. Но любое

$D(\alpha) \subset D$, и в силу леммы 2 $\mu(D(\alpha)) = 0$.

Достаточность. Для множества $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{1}{n}\right)$, но $\mu\left(D\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$, тогда $\mu(D) = 0$ и по критерию Лебега–1 функция $f(x)$ интегрируема по Риману. **Теорема доказана.**

5.8. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, тогда в силу свойства 6 (см. § 5.6) она интегрируема на любом отрезке $[a;t] \subset [a;b]$ при $t < b$, т. е. можно рассмотреть функцию

$$\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx,$$

называемую *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема (о непрерывности интеграла по верхнему пределу). *Если $y = f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, тогда $\Phi(t) \in C[a;b]$.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся определением непрерывности на языке приращений (см. § 3.6). Пусть $t \in [a;b]$ и $t + \Delta t \in [a;b]$, тогда приращение функции $\Phi(t)$ в точке t имеет вид

$$\Delta\Phi(t) = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)\,dx.$$

Так как $y = f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то в силу необходимого условия интегрируемости (см. § 5.3) $|f(x)| \le C$

$\forall x \in [a;b]$ при некотором $C \geq 0$, тогда $0 \leq |\Delta\Phi(t)| \leq C\cdot\Delta t$. Отсюда при $\Delta t \to 0$ получаем в пределе $\Delta\Phi(t) \to 0$, т. е. $\Phi(t) \in C[a;b]$. **Теорема доказана.**

Теорема (о дифференцируемости интеграла по верхнему пределу). *Если* $f(t) \in C[a;b]$, *то* $\Phi'(t) = f(t)$.

Доказательство. Найдем предел разностного отношения $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}$. Для этого оценим разность

$$\left|\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} - f(t)\right| = \left|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)\,dx - \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(t)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta t|}\cdot\int\limits_t^{t+\Delta t} |f(x) - f(t)|\,dx.$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (см. теорему Кантора § 3.8)

$$\left|\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} - f(t)\right| \leq \frac{1}{|\Delta t|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta t| = \varepsilon \quad \text{при} \quad \Delta t < \delta_\varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = f(t)$. **Теорема доказана.**

В силу доказанных теорем $\Phi(t)$ является первообразной для $f(t)$, т. е. справедливо равенство

$$\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx = F(t) + C,$$

где $F(t)$ — некоторая первообразная для $f(t)$ (см. § 5.1). Полагая $t = a$, имеем $0 = F(a) + C \;\Rightarrow\; C = -F(a)$, т. е.

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a).$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

полученная формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*, или *основной формулой интегрального исчисления*, другая форма записи этой же формулы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

5.9. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(t) \in C^1[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\forall t \in (\alpha,\beta)$ $a < \varphi(t) < b$, тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. В силу условий теоремы каждый из интегралов, фигурирующих в формуле, существует (см. § 5.5). Обозначим через $F(x)$ некоторую первообразную для функции $f(x)$, тогда $F(\varphi(t))$ — первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. В силу формулы Ньютона–Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

и

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $u(x), v(x) \in C^1[a;b]$, *тогда*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Доказательство. В силу условий теоремы оба интеграла, фигурирующих в формуле, существуют (см. § 5.5), поэтому

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du,$$

с другой стороны, в силу формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b.$$

Теорема 2 доказана.

5.10. Теоремы о среднем для определенного интеграла

Теорема 1 (первая теорема о среднем). *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, $m \le f(x) \le M$, $g(x)$ *знакопостоянна на* $[a;b]$, *тогда существует число* μ, $m \le \mu \le M$, *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть для определенности $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b]$, тогда справедливо двойное неравенство

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

проинтегрировав которое в пределах от a до b, получим в силу свойства 8 определенного интеграла (см. § 5.6)

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Так как $g(x) \geq 0$, то при $g(x) \not\equiv 0$ в силу того же свойства 8

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0.$$

Поделив последнее (двойное) неравенство на $\int_a^b g(x)\,dx$, получим

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Выбрав теперь в качестве μ величину

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

получим требуемое равенство. **Теорема 1 доказана.**

Следствие 1. *Если $f(x) \in C[a;b]$, то существует точка $\xi \in [a;b]$ такая, что*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Так как $f(x) \in C[a;b]$, то $f(x)$ достигает на $[a;b]$ свои максимальное M и минимальное m значения (см. теорему Вейерштрасса § 3.7), т. е. $m \le f(x) \le M$. Повторяя все рассуждения доказанной теоремы с заменой $g(x) \equiv 1$, получим

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M.$$

По теореме Больцано–Коши (см. § 3.7) $\exists \xi \in [a;b]$ такое, что

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Следствие 1 доказано.

Замечание 1. Величину $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называют *средним значением* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, этим объясняется название теоремы.

Замечание 2 (геометрический смысл теоремы о среднем). При $f(x) \ge 0$ величина $\int_a^b f(x)\,dx$ численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, а произведение $f(\xi)\cdot(b-a)$ численно равно площади прямоугольника со сторонами $f(\xi)$ и $(b-a)$, т. е. по теореме о среднем эти площади равны.

Следствие 2. *Пусть функция* $f(x) \in C[a;b]$, $g(x)$ *интегрируема и знакопостоянна на* $[a;b]$, *тогда* $\exists \xi \in [a;b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как $f(x) \in C[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на $[a;b]$ свои максимальное M и минимальное m значения, т.е. $m \le f(x) \le M$. По первой теореме о среднем найдется μ, $m \le \mu \le M$, такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

а по теореме Больцано – Коши $\exists\, \xi \in [a;b]$ такое, что $\mu = f(\xi)$, откуда и получаем требуемое утверждение. **Следствие 2 доказано.**

Теорема 2 (вторая теорема о среднем). *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, функция $g(x) \ge 0$ и не убывает на $[a;b]$, тогда существует число $c \in [a;b]$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b) \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть T — произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ мелкости δ_T, $\Delta x_i \le \delta_T$, составим сумму

$$\sigma(f,g,T) = \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

обозначим $M = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)|$ (эта величина существует и конечна в силу необходимого условия интегрируемости (см. § 5.3)). Составим и оценим разность

$$I = \sigma(f,g,T) - \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

В силу свойства 9 определенного интеграла

$$0 \le |I| = \left| \sum_{i=1}^{n_T} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_i) - g(x)) f(x)\, dx \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n_T} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x_i) - g(x)|\, |f(x)|\, dx.$$

Поскольку функция $g(x)$ не убывает, то

$$0 \le |I| \le \sum_{i=1}^{n_T} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_i) - g(x_{i-1})) M\, dx =$$

$$= M \sum_{i=1}^{n_T} (g(x_i) - g(x_{i-1})) \Delta x_i \le$$

$$\le M\delta_T \sum_{i=1}^{n_T} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = M(g(b) - g(a))\delta_T.$$

Если $\delta_T \to 0$, то

$$\lim_{\delta_T \to 0} \sigma(f, g, T) = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

В силу теоремы о непрерывности определенного интеграла с переменным (нижним) пределом (см. § 5.8) функция $\Phi(t) = \int\limits_t^b f(x)\, dx$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а значит, достигает на нем свои максимальное и минимальное значения $\Phi(\alpha) = \min\limits_{[a;b]} \Phi(t)$, $\Phi(\beta) = \max\limits_{[a;b]} \Phi(t)$, $\alpha, \beta \in [a; b]$, тогда $\forall t \in [a; b]$ справедливо неравенство $\Phi(\alpha) \le \Phi(t) \le \Phi(\beta)$.

С помощью введенной функции $\Phi(t)$ получим иное представление для суммы $\sigma(f, g, T)$:

$$\sigma(f,g,T) = \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{b} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{b} f(x)\,dx \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \Phi(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \Phi(x_i) =$$

$$= g(x_1)\Phi(a) + \sum_{i=2}^{n_T} g(x_i) \cdot \Phi(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n_T-1} g(x_i) \cdot \Phi(x_i) - g(b)\Phi(b).$$

Так как $\Phi(b) = 0$, то после изменения пределов суммирования в первой сумме получаем

$$\sigma(f,g,T) = g(x_1)\Phi(a) + \sum_{i=1}^{n_T-1} g(x_{i+1}) \cdot \Phi(x_i) - \sum_{i=1}^{n_T-1} g(x_i) \cdot \Phi(x_i) =$$

$$= g(x_1)\Phi(a) + \sum_{i=1}^{n_T-1} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \cdot \Phi(x_i).$$

Поскольку $g(x_1) \geq 0$, $g(x_{i+1}) - g(x_i) \geq 0$ и $\Phi(\alpha) \leq \Phi(t) \leq$ $\leq \Phi(\beta)$, то

$$\Phi(\alpha) \cdot g(b) \leq \sigma(f,g,T) \leq$$

$$\leq \left(g(x_1) + \sum_{i=1}^{n_T-1} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \right) \cdot \Phi(\beta) = \Phi(\beta) \cdot g(b).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_T \to 0$ в силу свойства монотонности операции предельного перехода, получаем

$$\Phi(\alpha) \cdot g(b) \leq \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leq \Phi(\beta) \cdot g(b),$$

и поскольку $g(b) > 0$,

$$\Phi(\alpha) \leq \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \Phi(\beta).$$

Как выше было отмечено, $\Phi(t) \in C[a;b]$, поэтому по теореме Больцано–Коши $\exists\, c \in [a;b]$ такая, что

$$\Phi(c) = \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

откуда и следует утверждение теоремы. **Теорема 2 доказана.**

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2′. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, функция $g(x) \geq 0$ и не возрастает на $[a;b]$, тогда существует число $c \in [a;b]$ такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Следствие. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, функция $g(x)$ монотонна на $[a;b]$, тогда существует число $c \in [a;b]$ такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b) \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Если $g(x)$ не убывает на $[a;b]$, то функция $g_1(x) = g(x) - g(a) \geq 0$ не убывает на $[a;b]$, тогда по теореме 2 существует число $c \in [a;b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)\,dx = g_1(b) \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Подставив в эту формулу выражение для $g_1(x)$, получим утверждение следствия.

Если $g(x)$ не возрастает на $[a;b]$, то функция $g_1(x) = g(x) - g(b) \geq 0$ не возрастает на $[a;b]$, и значит к паре функций $f(x)$ и $g_1(x)$ применима теорема $2'$, откуда и вытекает доказываемая формула. **Следствие доказано.**

Теорема 3 (третья теорема о среднем). *Если $f(x) \in C[a;b]$, $g(x) \in C^1[a;b]$, $g'(x) \geq 0$ на $[a;b]$, тогда существует число $c \in [a;b]$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\cdot\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\cdot\int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\Phi(t) = \int_a^t f(x)\,dx$, очевидно, $\Phi(a) = 0$ и $\Phi(t)$ дифференцируема по t (см. § 5.8), причем $\Phi'(t) = f(t)$ (в силу непрерывности $f(x)$, $\Phi(x) \in C^1[a;b]$), поэтому

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,d\Phi(x) = g(x)\Phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \Phi(x)g'(x)\,dx.$$

По теореме 1 существует число $c \in [a;b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(x)\Phi(x)\Big|_a^b - \Phi(c)\int_a^b g'(x)\,dx =$$
$$= g(b)\Phi(b) - g(a)\Phi(a) - \Phi(c)(g(b) - g(a)) =$$
$$= g(a)(\Phi(c) - \Phi(a)) + g(b)(\Phi(b) - \Phi(c)) =$$
$$= g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 3 доказана.

5.11. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Интегральные неравенства

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Пусть* $n \in N$, $f(x) \in C^{(n+1)}[a;b]$, *тогда* $\forall x \in [a;b]$ *справедлива формула*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 0$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

формула представляет собой формулу Ньютона–Лейбница, т. е. при $n = 0$ теорема справедлива.

Пусть формула справедлива при $n = k$, докажем ее при $n = k + 1$. Поскольку по предположению индукции

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \\ + \frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt,$$

то, проинтегрировав по частям остаточный член, получим

$$\frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = f^{(k+1)}(t) & dv = (x-t)^k\,dt \\ du = f^{(k+2)}(t)\,dt & v = -\dfrac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left\{ -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+1)}(t)\Bigg|_a^x + \frac{1}{k+1}\int\limits_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}\,dt \right\} =$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int\limits_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}\,dt,$$

что и завершает доказательство. **Теорема доказана.**

Сформулируем и докажем несколько теорем об интегральных неравенствах.

Теорема (неравенство Гельдера). *Пусть* $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *интегрируемы на* $[a;b]$, *тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. В §4.7 было доказано неравенство Юнга: $\forall t \ge 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ выполняется неравенство $t^\alpha \le \alpha t + \beta$, полагая в котором $t = \tau^{\frac{1}{\alpha}}$, $\tau \ge 0$, получаем другую форму записи $\tau \le \alpha \cdot \tau^{\frac{1}{\alpha}} + \beta$. Пусть $\tau = |f_1(x)| \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{p-1}}$, $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$, тогда

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{p-1}} \le \frac{1}{p}|f_1(x)|^p \cdot |g_1(x)|^{-\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} =$$

$$= \frac{|f_1(x)|^p}{p} \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{1-\frac{1}{p}}} + \frac{1}{q} = \frac{|f_1(x)|^p}{p} \cdot |g_1(x)|^{-q} + \frac{1}{q}.$$

Умножим это неравенство на $|g_1(x)|^q \geq 0$:

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{p-1}+q} \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q},$$

однако

$$-\frac{1}{p-1}+q = -\frac{1}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}+q = -\frac{q}{p}+q = g\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{q}{q} = 1,$$

поэтому

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q}.$$

Положим в этом неравенстве

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad g_1(x) = \frac{g(x)}{\left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}},$$

тогда

$$\frac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq$$

$$\leq \frac{|f(x)|^p}{p \cdot \int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot \int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx}.$$

Проинтегрировав это неравенство по $[a; b]$, получим

$$\frac{\int\limits_a^b |f(x) \cdot g(x)|\,dx}{\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда и следует неравенство Гельдера. **Теорема доказана.**

Следствие (неравенство Коши – Буняковского). *Если в условиях доказанной теоремы положить $p = q = 2$, то неравенство Гельдера принимает следующий вид:*

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|\, dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx},$$

называемый неравенством Коши – Буняковского.

Замечание. В условиях доказанной теоремы в силу свойства 9 определенного интеграла справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\, dx \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема (неравенство Минковского или обобщенное неравенство треугольников). *Если $p \ge 1$, функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство.

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot |f(x) + g(x)|\, dx \le$$

$$\leq \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot |f(x)|\,dx + \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot |g(x)|\,dx.$$

Далее в силу неравенства Гельдера

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, т. е. $\dfrac{1}{q}=1-\dfrac{1}{p} \Leftrightarrow q=\dfrac{p}{p-1}$, поэтому

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left\{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

или

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

что и доказывает неравенство. **Теорема доказана.**

Замечание. Методом математической индукции можно доказать более общие неравенства:

$$\left(\int_a^b |f_1(x)+\dots+f_n(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\int_a^b |f_n(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}};$$

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)^2 + \dots + \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)^2} \le$$

$$\le \int_a^b \sqrt{f_1^2(x)+\dots+f_n^2(x)}\,dx$$

в предположении интегрируемости функций $f_1(x), \dots, f_n(x)$ на отрезке $[a;b]$.

5.12. Понятие несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

При построении определенного интеграла использовались: а) *конечность* (по длине) отрезка $[a;b]$, по которому производится интегрирование; б) *ограниченность* функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ (необходимое условие интегрируемости см. § 5.3). Обобщение интеграла Римана на случай бесконечного промежутка интегрирования приводит к понятию несобственного интеграла 1-го рода, а на случай неограниченности функции в окрестности некоторых точек — к понятию несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; +\infty)$ (или на $(-\infty; a]$, или на $(-\infty; +\infty)$) и $\forall A \geq a$ (соответственно $\forall A \leq a$ или $\forall A'$, A'', $A' \leq A''$) существует интеграл Римана

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$$

$$\left(F_1(A) = \int\limits_A^a f(x)\,dx \quad \text{или} \quad F_2(A', A'') = \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right),$$

т. е. получили функцию от A (или от A', A'').

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$ (соответственно $\lim\limits_{A \to -\infty} F_1(A)$ или $\lim\limits_{\substack{A'' \to +\infty \\ A' \to -\infty}} F_2(A', A'')$), то он называется *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $y = f(x)$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{A \to -\infty} \int\limits_A^a f(x)\,dx \quad \text{или} \right.$$

$$\left. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A'' \to +\infty \\ A' \to -\infty}} \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right).$$

Если этот предел конечен, то интеграл называется *сходящимся*, если не существует, то — *расходящимся*. Проиллюстрируем сказанное, исследовав на сходимость следующие интегралы.

Пример 1.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{A} + 1\right) = 1.$$

Интеграл I_1 сходится.

Пример 2.

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A''\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int_{A'}^{A''} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A''\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \left(\operatorname{arctg} x \Bigg|_{A'}^{A''}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{A''\to+\infty \\ A'\to-\infty}} (\operatorname{arctg} A'' - \operatorname{arctg} A') = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Интеграл I_2 сходится.

Пример 3. Пусть $a > 0$, тогда

$$I_3 = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\Bigg|_a^A, & \alpha \neq 1; \\ \ln x \Bigg|_a^A, & \alpha = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{A^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right), & \alpha \neq 1; \\ \ln A - \ln a, & \alpha = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha \le 1. \end{cases}$$

Итак, при $\alpha > 1$ интеграл I_3 сходится, а при $\alpha \le 1$ интеграл I_3 расходится.

Пример 4.

$$I_4 = \int\limits_a^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A \cos x \, dx =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \sin x \Big|_a^A = \lim_{A \to +\infty} (\sin A - \sin a).$$

Полученный предел не существует, поэтому интеграл I_4 расходится.

Пример 5.

$$I_5 = \int\limits_a^{+\infty} e^{\alpha x} \, dx = \lim_{A \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \Big|_a^A =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \frac{e^{A\alpha} - e^{a\alpha}}{\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{e^{a\alpha}}{\alpha}, & \alpha < 0; \\ +\infty, & \alpha \ge 0. \end{cases}$$

При $\alpha < 0$ интеграл I_5 сходится, при $\alpha \ge 0$ — расходится.

Пример 6. Пусть $a > 1$, тогда

$$I_6 = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A \frac{d(\ln x)}{\ln^\alpha x} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} \ln^{1-\alpha} a, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha \le 1. \end{cases}$$

При $\alpha > 1$ интеграл I_6 сходится, при $\alpha \leq 1$ — расходится.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b)$ (или на $(a; b]$), неограничена при $x \to b-$ (или $x \to a+$), интегрируема (а значит, ограничена) на любом отрезке $[a; b - \alpha]$ (или $[a + \alpha; b]$), в этом случае точка b (или a) называется *особой* и определена функция

$$F(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \left(\text{или } F_1(\varepsilon) = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} F(\varepsilon)$ (соответственно $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} F_1(\varepsilon)$), то он называется *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$\left(\text{или} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Если этот предел конечен, то интеграл называется *сходящимся*, если не существует, то — *расходящимся.*

Пример 7.

$$I_7 = \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-b)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(x-b)^\alpha} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{(\alpha-1)(x-b)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}, & \alpha \neq 1; \\ \ln|x-b|\Bigg|_a^{b-\varepsilon}, & \alpha = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{(-\varepsilon)^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{(a-b)^{\alpha-1}}\right), & \alpha\neq 1;\\ \ln|\varepsilon|-\ln|a-b|, & \alpha=1\end{array}\right\} =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{(a-b)^{\alpha-1}}, & \alpha<1;\\ +\infty, & \alpha\geq 1.\end{cases}$$

Итак, при $\alpha < 1$ интеграл I_7 сходится, а при $\alpha \geq 1$ интеграл I_7 расходится.

Пример 8.

$$I_8=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin(1-\varepsilon)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Интеграл I_8 сходится.

В соответствии с критерием Коши существования предела функции (см. § 3.3) формулируется

Теорема (критерий Коши). *Несобственный интеграл 2-го рода сходится тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0$ *такое, что* $\forall\,(b-\varepsilon'')$ *и* $\forall\,(b-\varepsilon')$ *таких, что* $0<|(b-\varepsilon'')-b|=|\varepsilon''|<\delta_\varepsilon$ *и* $0<|(b-\varepsilon')-b|=|\varepsilon'|<\delta_\varepsilon$, *выполняется неравенство*

$$|F(\varepsilon'')-F(\varepsilon')|=\left|\int\limits_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Аналогично для несобственных интегралов 1-го рода справедлива

Теорема (критерий Коши). *Несобственный интеграл 1-го рода сходится тогда и только тогда, когда*

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall A_1 > \delta_\varepsilon$ и $\forall A_2 > \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|F(A_1) - F(A_2)| = \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Критерий Коши, будучи универсальным, не очень удобен при решении задач, поэтому возникает необходимость в более простых достаточных критериях.

5.13. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов

Теорема (признак сравнения в форме неравенств). *Если на луче $[a;+\infty)$ выполняется неравенство $|f(x)| \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*

Доказательство. Выпишем следующую цепочку неравенств при $A_2 > A_1 > a$:

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \le \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx.$$

Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ сходится, то в силу критерия Коши $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall A_1 > \delta_\varepsilon$ и $\forall A_2 > \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx < \varepsilon,$$

т. е. выполняется критерий Коши сходимости интеграла от функции $f(x)$.

Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, то в силу критерия Коши $\exists\,\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\delta_\varepsilon > 0$ найдутся $A_1 > \delta_\varepsilon$ и $A_2 > \delta_\varepsilon$, для которых выполняется неравенство

$$\varepsilon_0 \le \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx,$$

т. е. для интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ выполняется отрицание критерия Коши сходимости несобственного интеграла от функции $g(x)$. **Теорема доказана.**

Следствие (признак сравнения в предельной форме). *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^\alpha = c \ne 0$, *то при* $\alpha > 1$ *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, при* $\alpha \le 1$ *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

Доказательство. Пусть для определенности $c > 0$. Рассмотрим вначале случай $\alpha > 1$, тогда из существования предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^\alpha = c > 0$ следует, что функция $f(x)\cdot x^\alpha$ ограничена при $x \to +\infty$, т. е. $\exists\,C_0 > 0$ такая, что $0 < f(x)\cdot x^\alpha \le C_0$ при любом $x \ge A$ (начиная с некоторого $A > 0$), тогда при $x \ge A$ выполняется неравенство

$$0 < f(x) \le \frac{C_0}{x^\alpha}.$$

Но интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{C_0}{x^\alpha}\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ (см. пример 3 из предыдущего § 5.12), откуда в силу признака сравнения получаем требуемое утверждение.

Пусть $\alpha \le 1$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^\alpha = c > 0$, то $\exists\,\varepsilon_0 > 0$ такое, что $c-\varepsilon_0 > 0$, и для этого $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_{\varepsilon_0} > 0$ такое, что $\forall x > \delta_{\varepsilon_0}$ выполняется неравенство $|f(x)\cdot x^\alpha - c| < \varepsilon_0$ или $c-\varepsilon_0 < f(x)\cdot x^\alpha < c+\varepsilon_0$, т. е.

$$0 < \frac{c-\varepsilon_0}{x^\alpha} < f(x),$$

откуда с учетом примера 3 из предыдущего § 5.12 и признака сравнения получаем требуемое утверждение. **Следствие доказано.**

Замечание 1. Случай $c < 0$ рассматривается аналогично.

Замечание 2. Такие же утверждения справедливы для несобственных интегралов 2-го рода.

Пример 1 (интеграл Пуассона). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

называется *интегралом Пуассона* или *Эйлера – Пуассона*. Докажем сходимость этого интеграла. Для этого предварительно докажем справедливость вспомогательного неравенства $e^{x^2} \ge 1 + x^2$ $\forall x \in R$. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in R$. Так как $f'(x) = 2x(e^{x^2}-1)$, то $x = 0$ является точкой глобального минимума функции $f(x)$, поэтому $\forall x \in R$ выполняется неравенство $f(x) \ge f(0)$ или $e^{x^2} - x^2 \ge 1$, т. е. $e^{x^2} \ge 1 + x^2$. Отсюда следует, что $\forall x \in R$ справедливо неравенство

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}.$$

Но интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится (см. пример 2 из предыдущего § 5.12), поэтому в силу признака сравнения интеграл Пуассона сходится, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Пример 2. Функция $f(x) = x^n \cdot e^{-x^2}$ положительна при $x > 0$. С помощью правила Лопиталя можно проверить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2} \cdot e^{-x^2} = 0$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x > \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $x^{n+2} \cdot e^{-x^2} < \varepsilon$ или $x^n \cdot e^{-x^2} < \frac{\varepsilon}{x^2}$ при $x > \delta_\varepsilon$. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2}\,dx$ сходится (см. пример 1 из предыдущего § 5.12), то в силу признака сравнения сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} x^n \cdot e^{-x^2}\,dx \ \ \forall n \in N$, а вместе с ним и интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^n \cdot e^{-x^2}\,dx = \int\limits_{0}^{1} x^n \cdot e^{-x^2}\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} x^n \cdot e^{-x^2}\,dx.$$

Очевидно, в этой сумме первое слагаемое является простым римановским интегралом.

Пример 3 (гамма-функция). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx, \quad p > 0,$$

называется *гамма-функцией*.

При $p \geq 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot x^2 = 0$, поэтому при $p \geq 1$ интеграл сходится, см. рассуждения предыдущего примера.

При $0 < p < 1$ интеграл является несобственным по двум причинам: бесконечный предел интегрирования и обращение подынтегральной функции в $+\infty$ при $x \to 0+$, поэтому для исследования вопроса о сходимости разобьем интеграл на два слагаемых:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{1} x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx.$$

Второй интеграл сходится при любом $p > 0$, что доказывается дублированием всех рассуждений, проведенных в предыдущем примере 2. В первом же интеграле при $x \in [0; 1]$ справедливо неравенство

$$x^{p-1} \cdot e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^{1-p}} < \frac{1}{x^{1-p}},$$

но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ сходится при $1 - p < 1$ или $p > 0$ (см. пример 7 из предыдущего § 5.12), т. е. функция $\Gamma(p)$ определена при $p > 0$ и только для таких p. Причем для нее справедливы равенства:

$$\Gamma(p) = (p-1)! \quad \text{при} \quad p \in N,$$

$$\Gamma(p) = p\,\Gamma(p-1), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{при} \quad 0 < p < 1.$$

Теорема (признак Дирихле–Абеля). *Пусть выполнены условия:*

а) $f(x) \in C[a;+\infty)$ *и имеет ограниченную первообразную на* $[a;+\infty)$;

б) $g(x) \in C^1[a;+\infty)$, *монотонно убывает на* $[a;+\infty)$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ *сходится.*

Доказательство. Из условия б теоремы следует, что при $x \geq a$ выполняются неравенства $g(x) > 0$ и $g'(x) < 0$, а по условию а $\exists K > 0$ такая, что $|F(x)| \leq K$ (здесь $F(x)$ — первообразная для $f(x)$).

Доказательство проведем с использованием критерия Коши. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\cdot g(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = g(x) & dv = f(x)\,dx \\ du = g'(x)\,dx & v = F(x) \end{array} \right\} =$$

$$= g(x)F(x)\Bigg|_{A_1}^{A_2} - \int\limits_{A_1}^{A_2} F(x)\cdot g'(x)\,dx =$$

$$= g(A_2)F(A_2) - g(A_1)F(A_1) - \int\limits_{A_1}^{A_2} F(x)\cdot g'(x)\,dx,$$

тогда при $A_2 > A_1 > a$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq g(A_2)|F(A_2)| + g(A_1)|F(A_1)| + \int_{A_1}^{A_2} |F(x)| \cdot |g'(x)|\, dx \leq$$

$$\leq K(g(A_2) + g(A_1)) + K \int_{A_1}^{A_2} (-g'(x))\, dx =$$

$$= K(g(A_2) + g(A_1)) + K(g(A_1) - g(A_2)) = 2Kg(A_1).$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall A_1 > \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $g(A_1) < \dfrac{\varepsilon}{2K}$, тогда для таких $A_2 > A_1 > \delta_\varepsilon$ имеем неравенство

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) \cdot g(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

означающее согласно критерию Коши (см. §5.12) сходимость интеграла. **Теорема доказана.**

Пример 4 (интеграл Дирихле). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\, dx$$

называется *интегралом Дирихле*. Несмотря на наличие в знаменателе подынтегральной функции x, точка $x = 0$ не является особой для интеграла, так как по первому замечательному пределу (см. §3.4) $\dfrac{\sin\beta x}{x} \to \beta$ при $x \to 0+$. Полагая далее $f(x) = \sin\beta x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$, в силу признака Дирихле–Абеля получаем сходимость этого интеграла, причем

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\beta.$$

Сходимость интеграла Дирихле означает, что определена функция вида

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

называемая *интегральным синусом.*

Пример 5 (интегралы Френеля). В теории дифракции света встречаются два несобственных интеграла 1-го рода вида

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx,$$

которые называются *интегралами Френеля.* Докажем их сходимость на примере первого. Разложим интеграл на сумму:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx,$$

в которой первое слагаемое является римановским интегралом, а второе представим в виде

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_1^{+\infty} x\sin(x^2)\frac{1}{x}\,dx.$$

Полагая теперь $f(x) = x\sin(x^2)$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$, в силу признака Дирихле–Абеля получаем сходимость интегралов Френеля, причем

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Пример 6 (интеграл Лапласа). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$L(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx$$

называется *интегралом Лапласа.* Полагая здесь $f(x) = \cos \alpha x$ и $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, получаем сходимость этого интеграла, причем

$$L(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}.$$

5.14. Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Главное значение (в смысле Коши) несобственного интеграла

Теорема (замена переменных). *Пусть выполнены условия:*

а) $f(x) \in C[a; +\infty)$;

б) $g(t) \in C^1[\alpha; +\infty)$ *монотонна,* $g(t) : [\alpha; +\infty) \to [a; +\infty)$ и $g(\alpha) = a$,

тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Доказательство.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\Lambda \to +\infty} \int_{\alpha}^{\Lambda} f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{+\infty} f(g(t))g'(t)\,dt,$$

здесь $A = g(\Lambda)$. **Теорема доказана.**

Теорема (интегрирование по частям). *Пусть* $v(x)$, $u(x) \in C^1[a;+\infty)$, *существует предел* $L = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x)u(x) < +\infty$, *тогда интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно и справедлива формула*

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v\,du.$$

Доказательство.

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} u\,dv =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(u(A)v(A) - u(a)v(a) - \int_a^{A} v\,du \right) =$$

$$= L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v\,du.$$

Теорема доказана.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется

а) *абсолютно сходящимся,* если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$;

б) *условно сходящимся*, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, а сам интеграл сходится.

Сразу отметим, что в силу неравенства $f(x) \le |f(x)|$ и признака сравнения из абсолютной сходимости следует сходимость самого интеграла.

Пример. Несобственный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \alpha > 0,$$

в силу оценки

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$$

сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

В силу признака Дирихле – Абеля данный интеграл сходится при всех $\alpha > 0$. Из неравенства

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha},$$

расходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}\,dx$ при $0 < \alpha \le 1$ и сходимости по признаку Дирихле – Абеля интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ заключаем, что исходный интеграл при $0 < \alpha \le 1$ сходится условно.

Определение. Если $f(x)$ определена на R и интегрируема на каждом отрезке прямой, то предел (если он существует) $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$ называется *интегралом Коши* от $f(x)$ или *главным значением* несобственного интеграла и обозначается $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Очевидно, для нечетных функций $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$, а для четных — $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Библиографический список

1. *Ильин, В. А.* Математический анализ: в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М.: ИД Юрайт, 2013. — Т. 1. — 660 с.

2. *Ильин, В. А.* Математический анализ: в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М.: ИД Юрайт, 2013. — Т. 2. — 357 с.

3. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2004. — Т. 1. — 446 с.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2004. — Т. 2. — 464 с.

5. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2008. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — 704 с.

6. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. — 720 с.

7. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2006. — Т. 3. Гармонический анализ. Элементы функционального анализа. — 352 с.

Дополнительные учебники

8. *Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. — М.: Дрофа, 2008. — 640 с.

9. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2009. — Т. 1. — 608 с.

10. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2009. — Т. 2. — 800 с.

11. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2009. — Т. 3. — 656 с.

12. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 1. — 468 с.

13. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 2. — 448 с.

14. *Тер-Крикоров, А. М.* Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 672 с.

15. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Т. 1. — 648 с.

16. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — Т. 2. — 464 с.

17. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 1. — 400 с.

18. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 2. — 624 с.

19. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 1. — 664 с.

20. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 2. — 794 с.

21. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1967. — Т. 1. — 704 с.

22. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1970. — Т. 2. — 672 с.

23. *Рудин, У.* Основы математического анализа / У. Рудин. — М. : Мир, 1976. — 320 с.

Основные задачники

24. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : АСТ, 2009. — 560 с.

25. Математический анализ в вопросах и задачах : в 2 т. / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. — СПб. : Лань, 2008. — 480 с.

26. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : Дрофа, 2001. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление. — 728 с.

27. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — 712 с.

28. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. — 496 с.

29. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 2. Интегралы. Ряды. — 505 с.

30. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 3. Функции нескольких переменных. — 473 с.

Дополнительные задачники

31. *Марон, И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И. А. Марон. — СПб. : Лань, 2008. — 400 с.

32. Задачник по курсу математического анализа : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1971. — Т. 1. — 343 с.

33. Задачник по курсу математического анализа : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1971. — Т. 2. — 336 с.

34. *Очан, Ю. С.* Сборник задач по математическому анализу / Ю. С. Очан. — М. : Просвещение, 1981. — 271 с.

35. *Шибинский, В. М.* Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа / В. М. Шибинский. — М. : Высш. шк., 2007. — 544 с.

36. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М. : «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 1. — 304 с.

37. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М. : «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 2. — 416 с.

38. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. — М. : Высш. шк., 1966. — 464 с.

Учебное издание

Фалалеев Михаил Валентинович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В четырех частях
Часть 1

ISBN 978-5-9624-0823-1 (ч. 1)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Редактор *Э. А. Невзорова*
Компьютерный набор *М. В. Фалалеев*
Макет и рисунки подготовлены при помощи системы
LaTeX в РИО ИДСТУ СО РАН *Н. В. Починской*

Темплан 2013 г. Поз. 87
Подписано к печати 12.09.2013. Формат 60×90 1/16
Уч.-изд. л. 9,9. Усл. печ. л. 11,1. Тираж 100 экз. Заказ 90

Издательство ИГУ
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36